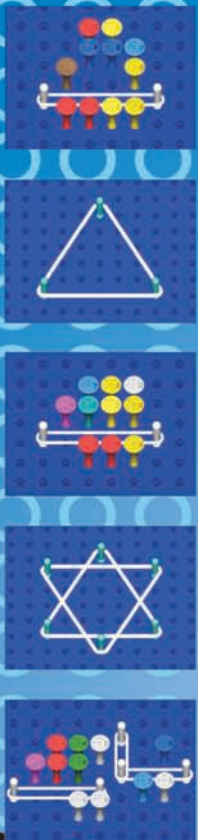
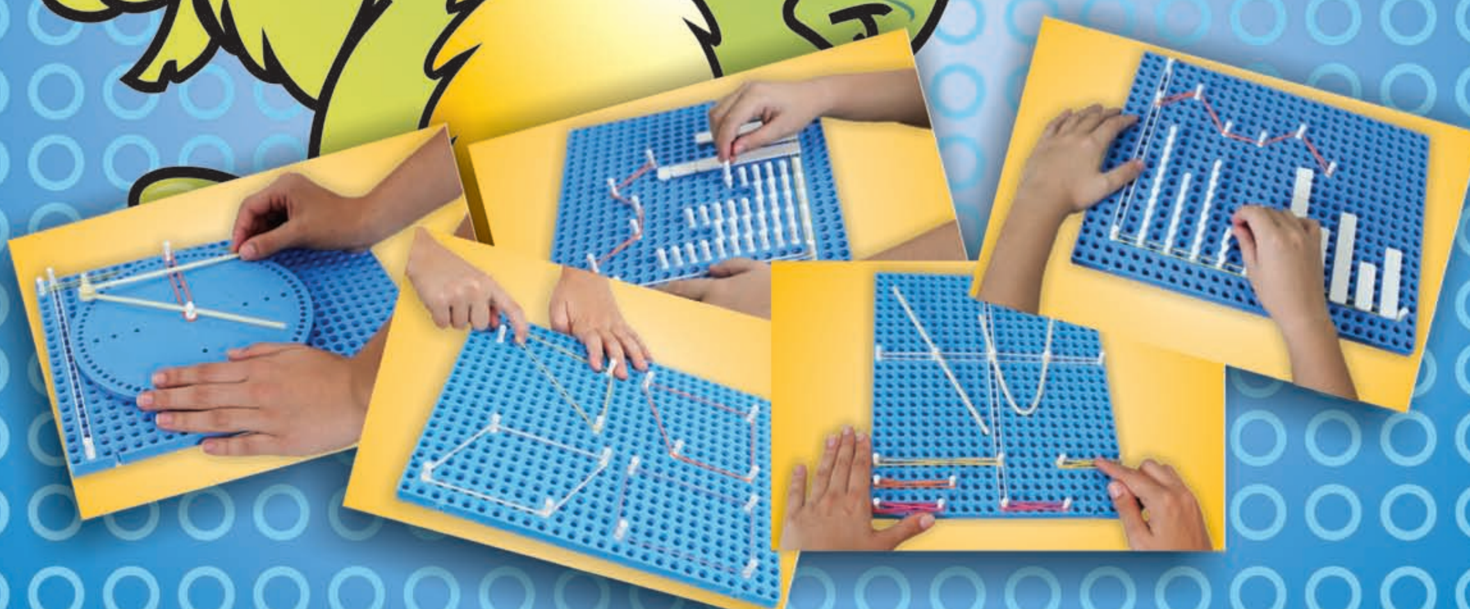
MULTIPLANO



Aprenda Matemática Brincando!

INDÚSTRIA DE PRODUTOS EDUCACIONAIS
MULTIPLANO



GUIA DE ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

www.multiplano.com.br

BREVE HISTÓRICO
MULTIPLANO: UM AVANÇADO NA MATEMÁTICA

Os primeiros passos para a construção desta ferramenta pedagógica denominada Multiplano, foram dados em abril de 2000. No decorrer dos anos se apresentou em forma de projeto sendo aprimorado de acordo com as necessidades e expectativas de educandos e educadores.

A origem se dá quando o professor Rubens Ferronato, autor deste instrumento enfrentou sérias dificuldades ao ensinar conteúdos matemáticos a um aluno cego, considerando as mínimas condições em que a maioria das escolas se apresenta no que tange aos métodos e materiais didático-pedagógicos adaptados às necessidades do grupo dicente, impossibilitando assim, uma maior interação no processo ensino-aprendizagem e na vinculação deste com a vida do educando.

Nesta circunstância, o professor estabeleceu diferenciadas formas para que o aluno pudesse aprender os conteúdos de CDI[1], os métodos convencionais não surtiam efeitos, diante da complexidade das interpretações gráficas propostas pela disciplina. Sentindo-se desafiado, o professo Rubens prometeu ao aluno que encontraria uma forma para fazer com que ele aprendesse Matemática. Foi assim que suas buscas começaram: consultas a especialistas na área da Educação Especial, bibliográficas diversas, e outras fontes.

No entanto, foi numa loja de materiais de construção que visualizou a concretização de sua promessa. Com uma placa perfurada, algumas rebites e elásticos, o professor foi para a sala de aula, e com grande expectativa apresentou o material improvisado ao aluno que após realizar alguns exercícios afirmou: "professor, o senhor não inventou um material ara mim mas, para todos os cegos do mundo! Era isso que faltava para eu aprender Matemática!"

Entusiasmado com os resultados alcançados através de experiências com alunos cegos e não cegos, o professor fora lapidando e transformando aquelas peças simples e rústicas, no atual e real **MULTIPLANO** que deixa de ser um projeto e se torna realidade - Um instrumento que possibilita através do tato, a compreensão de conceitos matemáticos.

O **MULTIPLANO** está sendo utilizado por pessoas com Necessidades Educacionais Especiais, em específicos os deficientes visuais, e por alunos e professores de classes regulares e especializadas nas diversas modalidades de ensino de várias instituições do país. Este recurso possibilita ao estudante a compreensão da lógica existente nos conteúdos matemáticos e configura-se como elemento decisivo para o entendimento e proposições de alternativas na superação de problemas vivenciados nesta área.

Conteúdos aplicados: Operações, tabuada, equações, proporção, regra de três, funções, matriz, determinante, sistemas lineares, gráficos de funções, funções exponenciais e logarítmicas, trigonometria, geométrica plana e espacial, Estatística, entre outros. Através do toque permite ao estudante, perceber os sentidos das operações matemáticas, pelo fato da percepção ser decorrente também do tato. O contato com este material pedagógico possibilita o entendimento da construção de fórmulas matemáticas, porque o estudante passa para a construção lógica do problema a partir da experimentação concreta. Assim, o aluno compreende o processo lógico que levou ao resultado e como se processa na prática.

O **MULTIPLANO** se tornou uma alternativa encontrada para efetivação do sonho de uma sociedade com oportunidades iguais para todos, sem preconceitos, discriminações, amenizando possíveis injustiças sociais.

1 CDI- Cálculo Diferencial e Integral - Disciplina componente ao currículo da Educação Superior

SUMÁRIO

Antes de iniciar o trabalho eis algumas recomendações:

- É importante que use uma linguagem clara, com informações detalhadas para que seu aluno compreenda e consiga fazer a relação com o cotidiano.
- Não fique inseguro, nem mude seus procedimentos diante de um aluno com deficiência visual, apenas intensifique e dinamize o uso do Multiplano para abstração dos conceitos.
- Ao utilizar o Multiplano com os alunos com necessidades especiais, você perceberá que todos os alunos da classe serão beneficiados pela facilidade na compreensão dos conteúdos desenvolvidos.
- Com o tom de voz nítido reproduza à classe os escritos em cartazes, quadro de giz e outros, visando a compreensão e apreensão por parte do aluno com deficiência visual do que está sendo proposto.
- Seja sempre cauteloso ao se comunicar com a classe, evitando fazer comparações que possam gerar sentimentos de inferioridade.
- Na medida do possível, trabalhe com os alunos com deficiência visual, os mesmos conteúdos atribuídos aos outros, para que sejam desenvolvidos na classe ou como tarefa de casa. Essa prática tem como finalidade valorizar o aluno com NEE e elevar sua auto-estima, fazendo-o perceber que é capaz.
- Você vai perceber que quanto mais os educandos se depararem com situações concretas de aprendizagem, independente, de terem ou não restrição sensorial, mais fácil conseguirão fazer suas abstrações.
- Para o aluno com deficiência visual a utilização de materiais concretos se torna imprescindível, haja vista que tem no concreto, no palpável, seu ponto de apoio para as abstrações.
- Lembre-se que o tato e audição são os órgãos dos sentidos mais aguçados e preciosos pelas pessoas com deficiências visuais, pois através da exploração tátil e auditiva que obtêm a maior parte das informações.
- Dê sentido a tudo o que está sendo ensinado, os alunos cegos e de baixa visão necessita entender o conteúdo e não apenas absorvê-lo.
- Exemplifique, constantemente as palavras utilizadas às explicações das atividades, elas precisam estar acompanhadas de seu sentido lógico, para que haja nexo na relação professor-aluno durante o processo de aprendizagem.
- É importante para o professor que queira melhorar a qualidade do ensino, reconhecer o aluno com deficiência visual como um indivíduo dotado de limitações e potencialidades como os demais.
- Peça ajuda, se porventura, surgirem dúvidas.

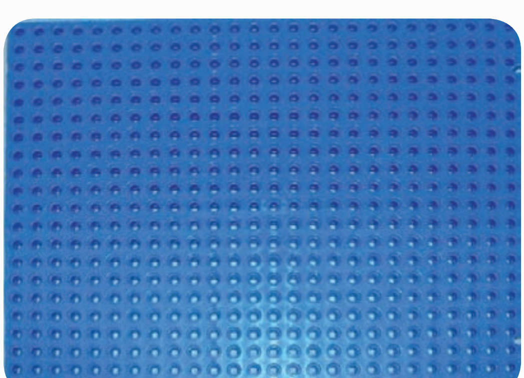
Lembre-se: Todo conhecimento que tange à disciplina de Matemática sistematicamente programado na proposta curricular da instituição de ensino é um direito do aluno para o exercício de sua cidadania e quando não ensinado poderá lhe acarretar certas fragilidades em sua vida.

KIT MULTIPLANO

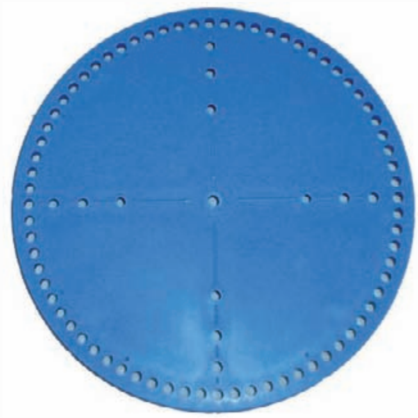
Estojo do kit **Multiplano**.

Compartimento superior: Reservado para hastes, barras de Estatística, Pinos, fixadores, elásticos e base de operações.

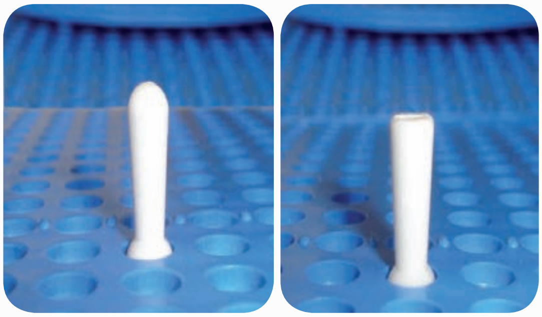
Compartimento inferior: Reservado para os pinos identificados em Braille, contendo 10 pinos de cada algarismo, sinal ou letra.



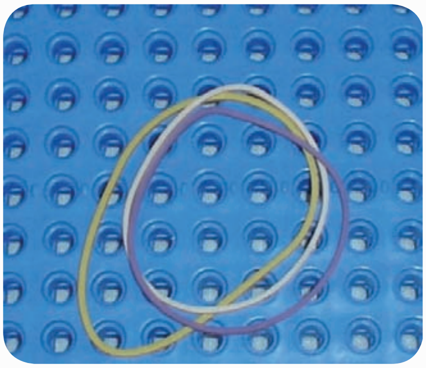
Multiplano Retangular: Possui 546 furos distribuídos em 26 linhas e 21 colunas.



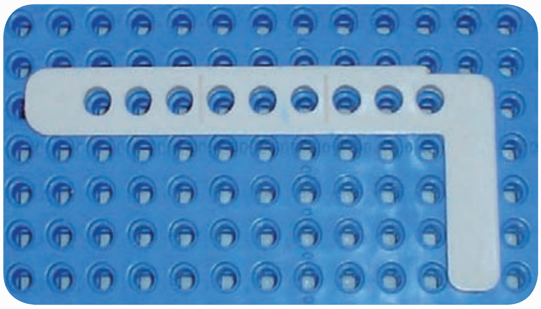
Multiplano Circular: Possui 72 furos na circunferência, distribuídos de cinco em cinco graus, além dos furos da extremidade possui 12 furos no seu interior que representam a projeção do raio sobre os eixos, nos ângulos de 30º, 45º e 60º e um furo central.



Pinos para diversas aplicações como: Fixador de elástico, indicador de posição, unidade de contagem, etc. Além disso, o pino com superfície esférica serve para indicar números positivos, intervalo fechado dentro dos números reais e o pino de superfície plana é usado para números negativos, intervalo aberto de números reais, entre outras aplicações.

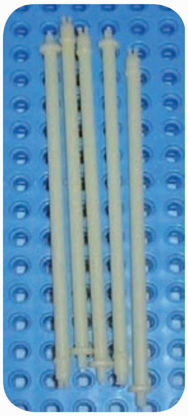


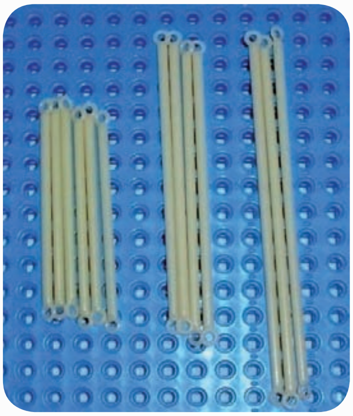
Elásticos: São aplicados nas figuras geométricas como segmento de retas, em intervalos numéricos dos números reais, etc.



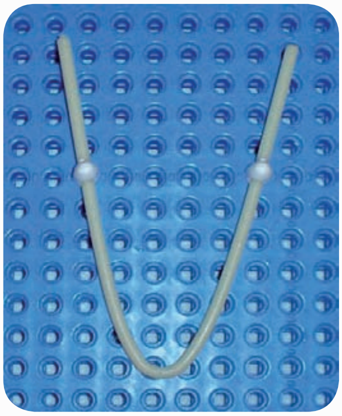
Base de operações: Aplicado para identificação de pequenos a grandes números, operações etc.

Fixador de **Multiplano**: Usado para o agrupamento de duas ou mais placas Multiplanos.

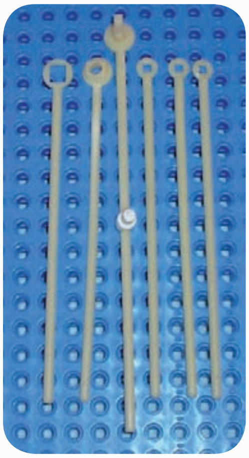




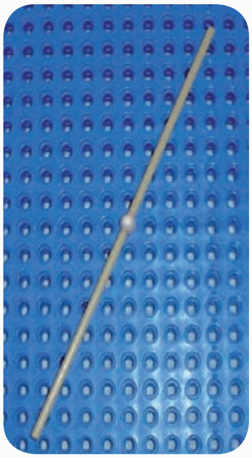
Hastes para sólidos geométricos (Prismas, pirâmides).



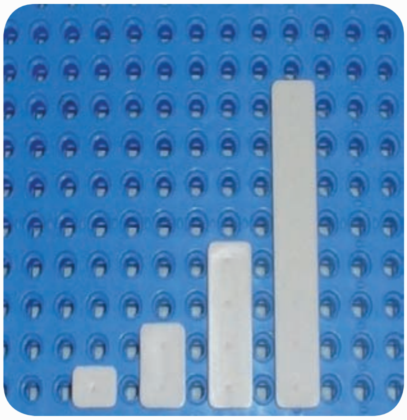
Parábola: Usada no plano cartesiano para representar o esboço de um gráfico da função de segundo grau.



Hastes trigonométricas para análise do comportamento das funções trigonométricas, como: Seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante.



Haste reta: Usada no plano cartesiano para representar o esboço de um gráfico de função do primeiro grau, aplicado como raio nas figuras circulares, etc.



Estatística: Aplicado na montagem de gráficos de barras, desenho de figuras planas etc.

MULTIPLANO VIRTUAL

Ciente de que as chamadas inovações tecnológicas têm surpreendido a humanidade através de criações informatizadas e respectivas explorações, e que o uso de novas tecnologias em nosso dia-a-dia é uma tendência, atingindo as escolas de todos os níveis e modalidades, vale ressaltar que é de suma importância a discussão sobre a utilização simultânea de recursos didático-pedagógicos concretos e virtuais no contexto escolar, desta forma propiciados através de software. No que tange a educação inclusiva, o projeto **Multiplano** Virtual se torna uma possibilidades de novos caminhos que vem a favorecer o processo de aprendizagem, autonomia e acima de tudo de inclusão social dos cidadãos, quando respaldados nos resultados surpreendentes obtidos pela aplicação da matemática por todos os alunos através da utilização do instrumento concreto **Multiplano**, percebeu-se a importância de desenvolver simultaneamente um software baseado neste recurso que consiste ao aluno deficiente visual utilizará o **Multiplano** concreto para compreensão através da percepção tátil, e a partir deste estará apto a utilizar a ferramenta virtual que se difere do concreto pela percepção auditiva (emissão de sons) para aplicar e aperfeiçoar seus conhecimentos. Esse recurso possibilita às pessoas com deficiências visuais, assim como alunos que enxergam a utilizarem a mesma ferramenta construindo uma escola de educação inclusiva.

A UTILIZAÇÃO DO MULTIPLANO VIRTUAL

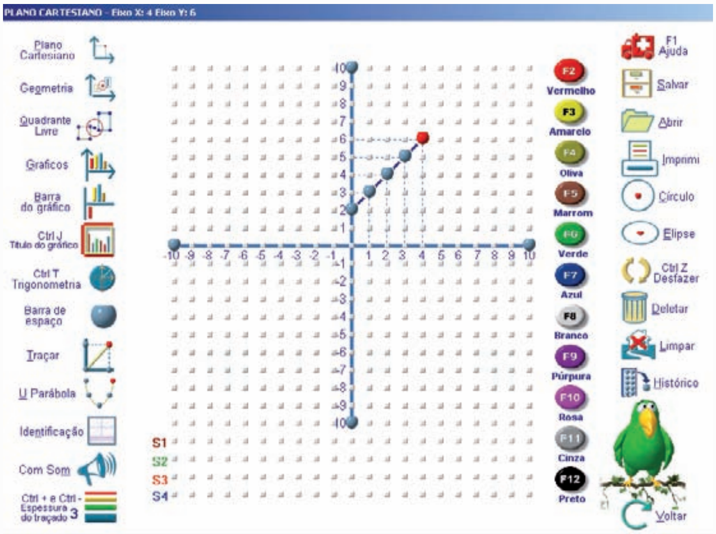
Após a utilização do **Multiplano** Concreto o aluno encontrará uma facilidade ainda maior no virtual, visto que os mesmos conceitos aprendidos no instrumento concreto são aplicados no software.

O software tem a mesma facilidade de operação, com teclas de atalhos, poderá acessar todas as funções disponíveis pelo programa, todo esse processo se dá mediante a comandos falados. Para acessar o programa basta ligar o equipamento onde o mesmo está instalado e pressionar as teclas "ctrl+alt+m", em seguida terá a sua disposição uma tela com todas as opções do software, arquivos de ajuda e todas as funções necessárias para desenvolver o estudo, levando em consideração todo o aprendizado adquirido no instrumento concreto.

Ao acessar a opção do plano cartesiano as coordenadas são relacionadas aos eixos (x,y) permitindo uma fácil e rápida localização, por exemplo, a coordenada (2, 4) de acordo com a regra matemática, considera-se o primeiro número no eixo x e o segundo no eixo y. Localiza-se o cruzamento dos eixos (ponto de origem) do plano cartesiano, e em seguida com as teclas de navegação procura-se os números desejados, sempre atento ao som da coordenada para identificar a sua localização, após encontrá-lo poderá marcá-lo com a barra de espaço ou a letra "m". Caso queira retornar a origem com apenas um toque na tecla "alt" saberá onde se encontra e poderá retornar ao cruzamento dos eixos (ponto de origem) teclando "c" a qualquer momento não importando em qual posição esteja, sem precisar voltar ponto a ponto. Poderá inserir sua identificação teclando "n" para posterior impressão junto ao trabalho realizado.

A inclusão social e digital realmente é possível porque todos têm a possibilidade de interagir no grupo, enriquecendo-se com as vantagens que as relações humanas travadas em meio à diversidade possibilita, além de proporcionar a igualdade de oportunidades.

O **Multiplano** apresenta diversas outras possibilidades de uso, e todas elas, inclusive as descritas, podem ser trabalhadas por cegos e videntes, sem que haja necessidade de adaptações.



Exemplo de uma função de primeiro grau.

CONTEÚDOS A SEREM TRABALHADOS NO MULTIPLANO

EDUCAÇÃO INFANTIL

De três a seis anos:

Utilização da contagem oral, de noções de quantidade, de tempo e de espaço em jogos, desenhos brincadeiras junto com o professor e nos diversos contextos nos quais as crianças reconhecem essa utilização como necessária.

Números e sistema de numeração: contagem, notação e escrita numéricas e operações matemáticas;

Espaço e forma: representação da posição de pessoas e objetos, exploração e identificação de propriedades geométricas de objetos e figuras (formas, tipos, contornos, bidimensionalidade, tridimensionalidade, faces planas, lados retos, etc.), identificação de pontos de referência, descrição e representação de percursos, trajetos, etc.

ENSINO FUNDAMENTAL (1º À 5º ANO)

1º e 2º ano:

Números: Contagem, construção da tabuada, classificação e seriação dos números (menos/mais, sucessor/antecessor, metade/dobro, par/ímpar, dúzia/meia dúzia, etc.

Operações básicas (adição, subtração, multiplicação, divisão);

Geometria: A criança e o espaço, semelhança e diferença entre as formas geométricas, classificação dos sólidos geométricos e figuras planas, classificação das figuras planas (quadrados, retângulos, triângulos e círculos), composição das formas, mosaicos, cubo.

3º ao 5º ano:

Números: tabuada, cálculo mental, sistema de numeração decimal, algoritmos das operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão), organização retangular, operações inversas, resolução por tentativas, lucro e prejuízo, média aritmética, frações de figuras e quantidades, possibilidades, seqüências, estatística e gráficos, estimativas, possibilidades.

Geometria: simetria, padrões geométricos, construções geométricas, polígonos, quadriláteros, vistas de objetos e mapas (superior e plana), empilhamentos, ângulos, percepção geométrica, paralelas e perpendiculares, diagonais, semelhança, formas, vértices, arestas, faces.

Medidas: perímetro, comparação de comprimentos, itinerários, distâncias, décimos, centésimos, áreas.

ENSINO FUNDAMENTAL (5ª À 8ª SÉRIES)

5ª Série: Formas geométricas; Operações fundamentais; Múltiplos e divisores; Construções geométricas; Frações; Números decimais e medidas; Simetria; Linguagem matemática: expressões numéricas; Áreas e perímetros; Possibilidades e estatística; Porcentagens; Generalizações.

6ª Série: Números naturais; Números decimais e frações; Formas geométricas; Medidas; Proporcionalidade; Números negativos ou positivos; Construções geométricas; Equações; Porcentagens; Estatística e gráficos; Áreas e volumes.

7ª Série: Aplicações da matemática; Números primos; Operações com frações; Construções geométricas; Potências e raízes; Ângulos e polígonos; Cálculo algébrico; Estatística e possibilidades; Perímetros, áreas e volumes; Equações e sistemas de equações; Geometria e proporcionalidade; Figuras espaciais.

8ª Série: Semelhança; Números e cálculos; Equações e sistemas de equações; Trigonometria; Medidas; Classificação dos números; Estatística; Propriedades geométricas; Proporcionalidade e juros; Funções; Produtos notáveis e fatoração; Equações fracionárias; Construções geométricas.

ENSINO MÉDIO

Modelagem matemática; Perímetro e área; Classificação e nomenclatura dos sólidos geométricos e figuras planas; Planificação dos sólidos através do contorno das faces; Figuras geométricas; Cálculo de área; Retas paralelas; Cálculo de volume; Sistema de equações através do método gráfico; Conjuntos; Conjuntos numéricos; Intervalos numéricos; Funções; Gráficos; Inequações com auxílio; Divisão de polinômios no **Multiplano**; Função modular e seu gráfico; Função exponencial e logarítmica; Gráfico das funções exponenciais e logarítmicas; Análise combinatória e probabilidade; Estatística; Trigonometria;

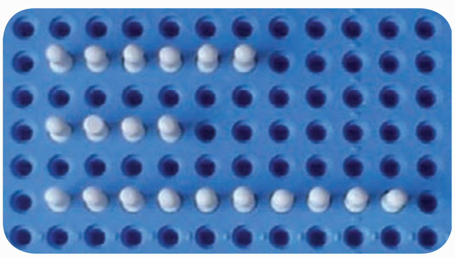
"Um excelente material pedagógico aplicado aos alunos videntes, pode ser bom para alunos cegos.
Um bom material pedagógico aplicado aos alunos cegos, é ótimo para alunos videntes".

RUFE

Apre-
sentaremos algumas
aplicações matemáticas, lembran-
do que não se limita aos exemplos
a seguir:

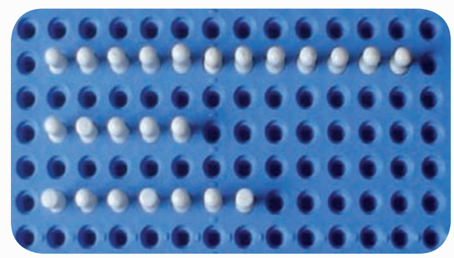
OPERAÇÕES DE FORMA PRIMITIVA

Adição



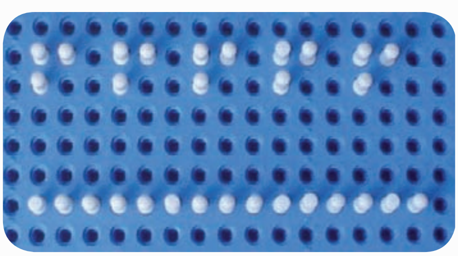
6 + 4 = 10

Subtração



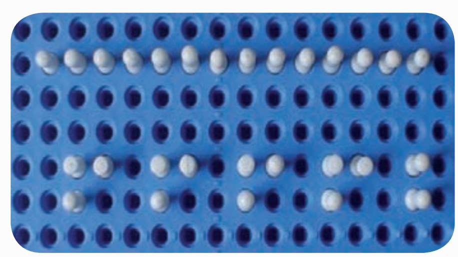
12 – 5 = 7

Multiplicação



5 x 3 = 15

Divisão



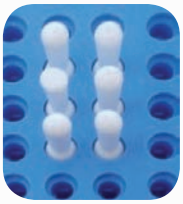
14 ÷ 4 = 3 e resto igual a 2

TABUADA

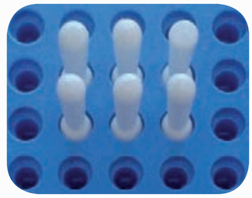
A tabuada vem sendo trabalhada nas escolas de um modo tal que não surte o efeito esperado: Os alunos têm muita dificuldade em abstrair este conteúdo, uma vez que lhe são estipulados 100 números a serem decorados/memorizados, o que acaba por surtir como efeito o sentimento de impotência frente a tantos algarismos.

Uma alternativa é que o próprio aluno construa a tabuada antes mesmo de decorá-la para isso será inserido pinos no **Multiplano** em forma de linhas e colunas, a partir da contagem fará a anotação do resultado. Quanto mais simplificada a tabuada se tornar para o aluno, mais fácil será o seu reconhecimento enquanto conhecimento cotidiano, e conseqüentemente, mais facilitado também será o seu processo de abstração.

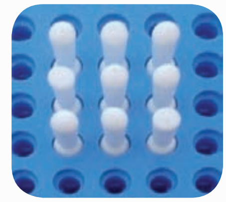
Sendo assim, propõe-se que seja mostrado aos educandos somente a quantidade necessária de números dos quais ele precisa saber, sem que sejam repetidas situações similares, as quais, para serem resolvidas, basta aplicar a propriedade matemática da comutação (a ordem dos fatores não altera o produto final). Por exemplo: 2x3 é igual a 3x2. Veja a seguir.



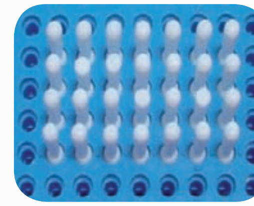
3 x 2 = 6



2 x 3 = 6

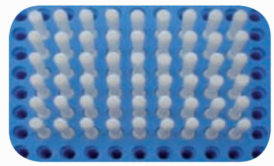


3 x 3 = 9

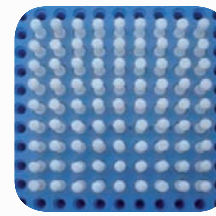


4 x 7 = 28

7 x 4 = 28



6 x 9 = 54



9 x 9 = 81

O professor pode trabalhar de acordo com a necessidade e a maturidade da turma, sem necessariamente, seguir um cronograma pré-estabelecido.

A tabuada do 1 é desnecessária, uma vez que o algarismo 1 é elemento neutro e, portanto, gera como produto o próprio número que está sendo multiplicado.

Na tabuada do 2, seguindo a linha de raciocínio apresentada, pode começar a partir do produto 2x2, seguindo a ordem sucessiva até 2x9, não havendo necessidade de apresentar ao aluno o produto de 2x1. A partir do momento que o aluno conseguir perceber que 2x3 = 3x2 = 6 e, se ele já aprendeu quanto é 2x3, também já sabe quanto é 3x2. Logo, a tabuada do 3 começa pelo produto 3x3 seguindo, sucessivamente, até 3x9, assim como a tabuada do 4 pode ser iniciada direto pelo produto 4x4, ..., 4x9; a do 5 pode iniciar pelo produto 5x5, ..., 5x9, e assim por diante.

Nota-se, portanto, que para aprender a tabuada do 2, basta o aluno assimilar oito produtos; tabuada do três, sete produtos; na do quatro, seis produtos, seguindo essa lógica até a tabuada do 9, que para o aluno bastará assimilar o produto 9x9, levando em consideração que os demais, utilizando-se da propriedade da comutação, já farão parte do seu dia-a-dia. Totaliza-se, assim, somente 36 produtos a serem assimilados ao invés de 100, como até então é feito.

A Figura ilustra uma situação prática para o aluno assimilar a tabuada:

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

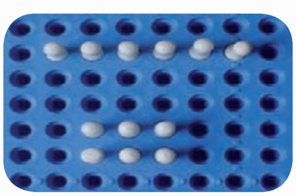
A área demarcada representa os produtos que realmente precisam ser trabalhados com os alunos. A Figura a seguir representa os 10 números que a maioria dos alunos têm dificuldade em assimilar, levando-se em consideração que a dificuldade maior dos alunos está concentrada a partir da tabuada do 6.

x	6	7	8	9
6	36	42	48	54
7		49	56	63
8			64	72
9				81

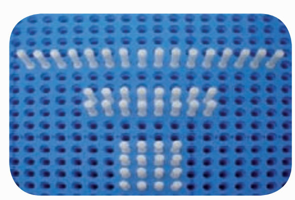
Pode afirmar, portanto, que o problema com a memorização da tabuada pode ser amenizado quando o docente tiver clareza quanto à concepção como se desenvolver um trabalho com material didático e metodologias apropriadas à realidade, coerentes e condizentes com as necessidades do mundo atual, se tornando dinâmico e prático, e acima de tudo, que saiba trabalhar com significados, apresentando aos educandos a importância dos conteúdos.

DIVISORES

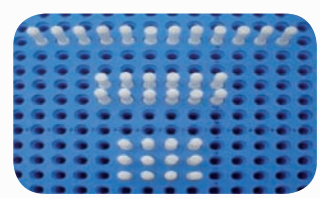
Para o estudo dos divisores de um número, pode-se fixar pinos numa linha, na quantidade que represente o número, após esta disposição, fazer tentativas para encontrar outras formas de montar retângulos ou quadrados.



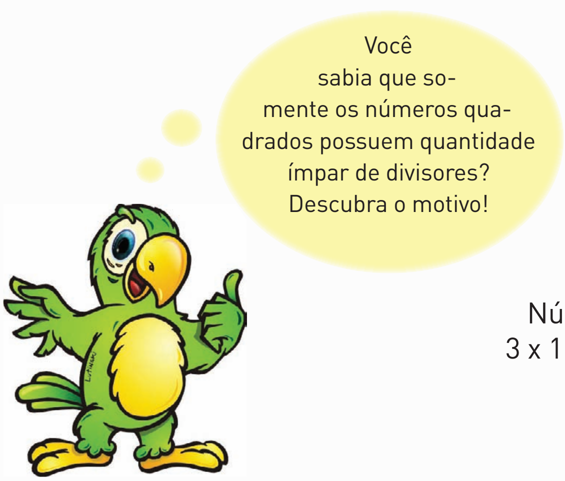
Número 6 representado de 2 maneiras 1 x 6 e 2 x 3. Portanto, os divisores do 6 são os números {1, 2, 3, 6}.

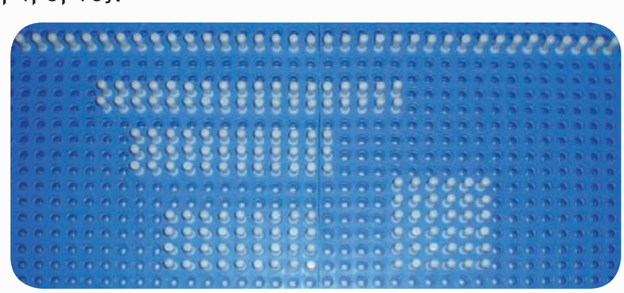


Número 16 representado de 3 formas 1 x 16; 2 x 8 e 4 x 4. O 4x4 indica que o 16 é um número quadrado e seus divisores são: {1, 2, 4, 8, 16}.



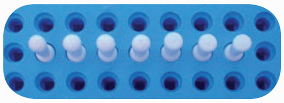
Número 12 representado de 3 maneiras: 1 x 12; 2 x 6 e 3 x 4. Seus divisores {1, 2, 3, 4, 6,12}.



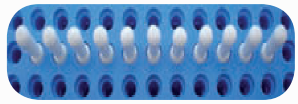


Número 36 representado de 5 formas: 1x 36; 2 x 18; 3 x 12; 4 x 9 e 6 x 6. A representação 6 x 6 dá o título ao 36 de número quadrado.
{1, 2, 3, 4, 6, 9,12, 18, 36}.

NÚMEROS PRIMOS



Número 7



Número 11

Número 17

NÚMEROS QUADRADOS

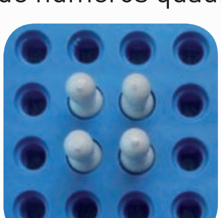
Para responder esta pergunta, vamos colocar dois pinos um ao lado do o utro no **Multiplano**, e fazer a pergunta. Dois pinos representam uma forma de quadrado?

Observando a disposição dos pinos dá para perceber que não tem nada a ver com um quadrado.

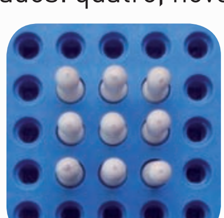
Agora vamos inserir mais um pino (três). Tem algo a ver com um quadrado? Com certeza não.

Acrescentando mais um pino (quatro).

Exemplo de números quadrados: quatro, nove, dezesseis, ..., cem, etc.



2^2



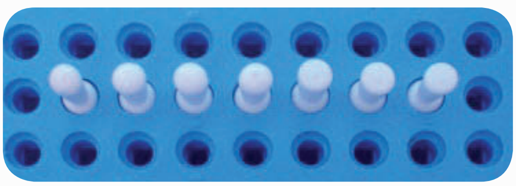
3^2

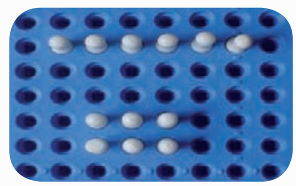
4^2

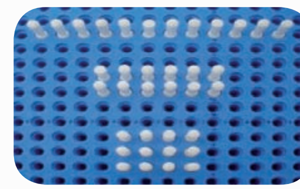
5^2

Como dá para perceber não forma quadrado e sim um retângulo.

Todos os números podem ser dispostos em forma de uma linha, um retângulo ou vários retângulos.

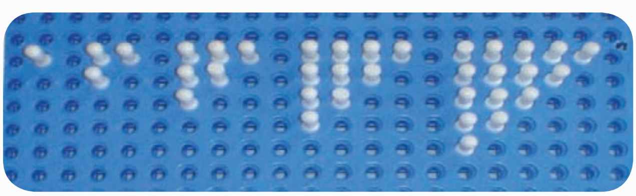






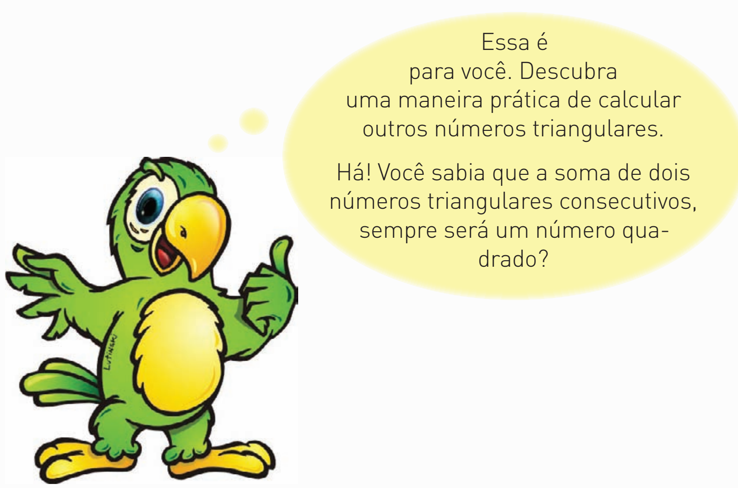
Mas nem todos possibilitam a formação de um quadrado.

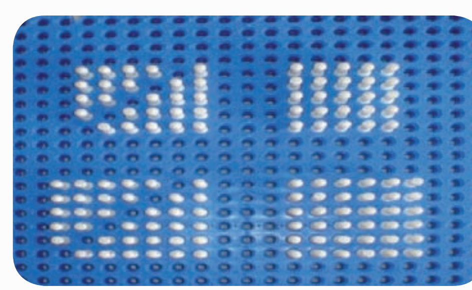
NÚMEROS TRIANGULARES



É chamado de triangular, a quantidade de pinos que formam um triângulo isósceles, com os três lados com a mesma quantidade de pinos.

Seqüência dos números triangulares: {1, 3, 6, 10, 15, ...}.





$(1 + 3 = 4)$; $(3 + 6 = 9)$; $(6 + 10 = 16)$; $(10 + 15 = 25)$; $(15 + 21 = 36)$; ...

RAIZ QUADRADA

O que significa raiz quadrada?

Raiz quadrada é usada para descobrir o lado de um quadrado de um quadrado que possui determinada área.

Por exemplo:

Com base nesta aplicação, quando pretendemos encontrar a raiz quadrada de um número, na verdade, estamos procurando o lado do quadrado que tem como área o número que está dentro da raiz.

$2^2 = 4$

$\sqrt{4} = 2$

$3^2 = 9$

$\sqrt{9} = 3$

$4^2 = 16$

$\sqrt{16} = 4$

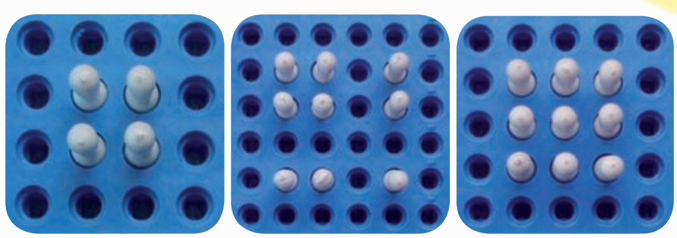
$5^2 = 25$

$\sqrt{25} = 5$

PRODUTOS NOTÁVEIS

Partindo do quatro, deseja-se encontrar o próximo quadrado perfeito, para isso temos que acrescentar dois pinos em uma das colunas, dois pinos em uma das linhas e um pino para fechar o cantinho.

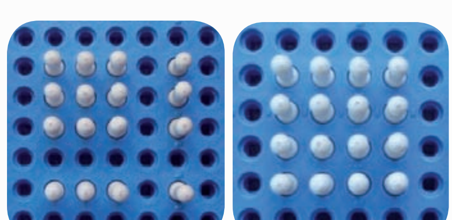
Para facilitar vamos montar no **Multiplano** um número quadrado e a partir dele encontrar o próximo quadrado perfeito.



$2^2 + 2 + 2 + 1 = 9 = 3^2$

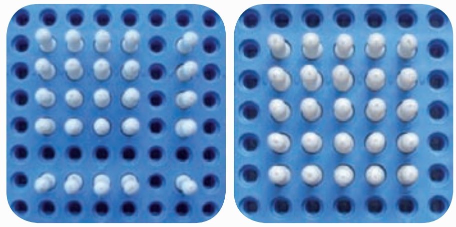
Continuando do nove para o próximo número quadrado, temos que acrescentar três pinos em uma das linhas, três pinos em uma das coluna, mais o pino do cantinho.

Ou podemos considerar que é 3^2 mais 2x3 mais 1.



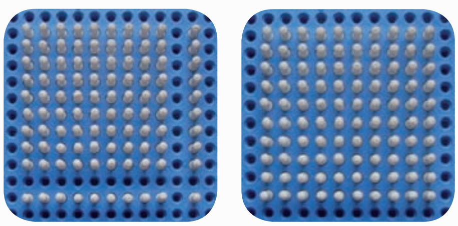
$3^2 + 3 + 3 + 1 = 16 = 4^2$

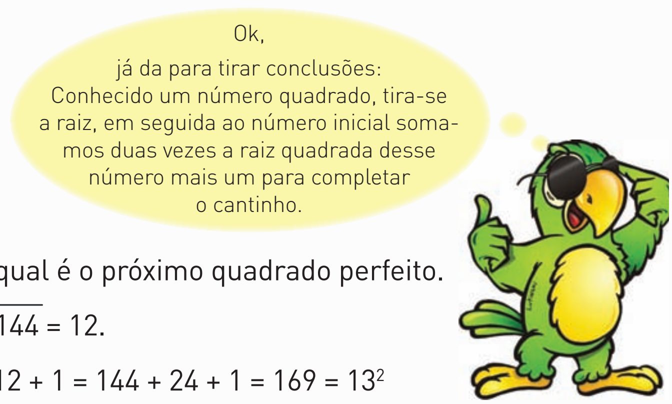
Assim o 4^2 mais 2x4 mais 1 é igual a 5^2.



$$4^2 + 2x4 + 1 = 5^2$$
$$16 + 8 + 1 = 25 = 5^2$$

Com o número quadrado 81 deseja-se construir o próximo quadrado perfeito primeiro passo é tirar a raiz quadrada do 81, $\sqrt{81} = 9$. Feito isso basta somar as partes, $81 + 2 x 9 + 1 = 100$, o mesmo que 10^2.



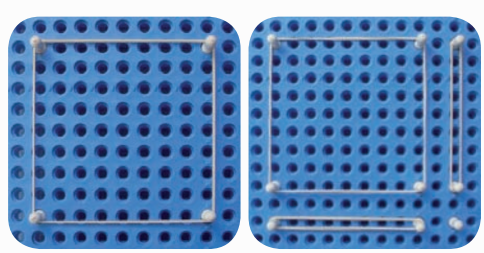


Exemplo: Se o número quadrado é o 144, qual é o próximo quadrado perfeito.

Primeiro passo; tira-se a raiz quadrada $\sqrt{144} = 12$.

Segundo passo; efetuar a soma $144 + 2 x 12 + 1 = 144 + 24 + 1 = 169 = 13^2$

Se o quadrado perfeito tem n^2 pontos e lado n, então qual será o próximo quadrado perfeito?



O próximo quadrado perfeito será $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, como podemos ver na figura.

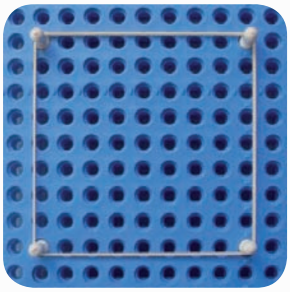
Considerando o mesmo quadrado de área n^2 e lado n, queremos encontrar a área do quadrado com lado $(n + 2)$.

Dispondo duas colunas de n pinos à direita, duas linhas de n pinos abaixo e finalmente completar o canto.

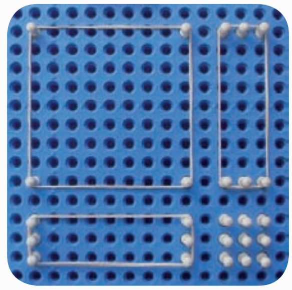
Temos a nova figura formada por n^2, mais 2n para a direita, 2n para baixo e quatro pinos no canto. Algebricamente podemos escrever:

$(n + 2)^2 = n^2 + 2 x 2n + 4$ ou $(n + 2)^2 = n^2 + 4n + 2^2$

Para $(n + 3)$



$(n + 3)^2 = n^2 + 2 \times 3n + 3^2$



$(n + 3)^2 = n^2 + 6n + 3^2$

Os produtos notáveis são importantes para que sejamos ágeis no momento de efetuar os cálculos algébricos.

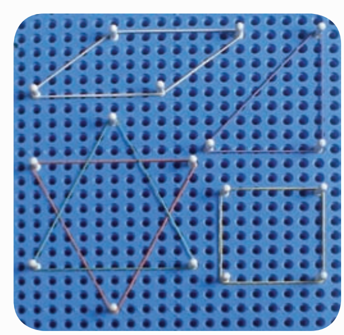
Partindo do n^2 deseja-se encontrar o número quadrado $(n + a)^2$, seguindo o raciocínio, devemos adicionar os valores; n^2 mais $2na$ mais a^2. $(n + a)^2 = n^2 + 2na + a^2$.

FIGURAS GEOMÉTRICAS

A identificação de figuras geométricas também pode ser feita através do **Multiplano**. Para tanto, os pinos devem ser posicionados nos pontos de vértice das figuras, para que os elásticos possam delimitar a área. Segue exemplos de figuras que podem ser montadas no **Multiplano**. No material é possível fazer o deslocamento de um ou mais pontos de vértice, o que permite que o aluno perceba a modificação ocorrida e suas implicações. Com as figuras construídas, todos os conceitos geométricos, seja eles referente a geometria plana,analítica ou espacial, podem ser explorados, além de ser possível utilizaras figuras com vistas a esclarecer os fundamentos de problemas que envolvem probabilidade, entre outros.

É bom lembrar que você vai precisar um pouco de esforço na retirada dos pinos, pois foram confeccionado com travas na sua base visando sua proteção.

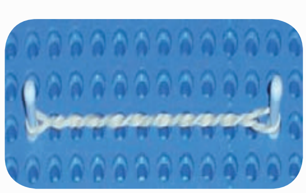
Na montagem de uma figura, primeiro coloque os pinos e depois o elástico. Ao desmontar a figura, primeiro retire o elástico e após, os pinos.



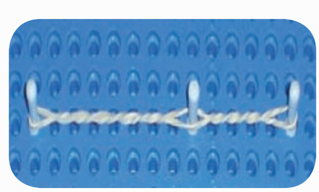
Simulação de figuras geométricas no **Multiplano**

ENTES GEOMÉTRICOS PRIMITIVOS

Ponto



Segmento de reta

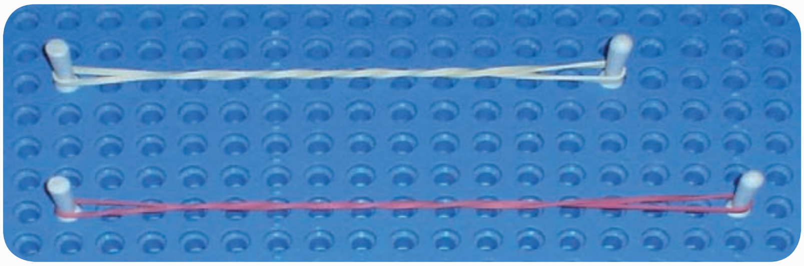


Pontos colineares

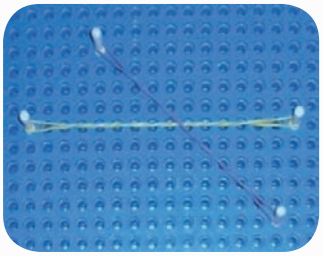
Na verdade, até hoje ninguém conseguiu desenhar uma reta ou semireta, apenas desenhamos segmentos de reta.

Plano

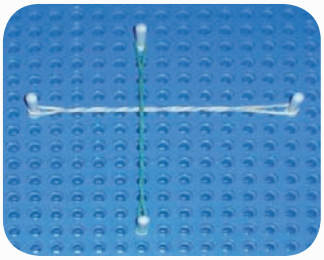
RETAS PARALELAS



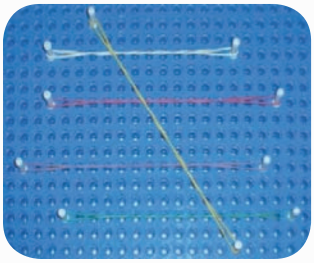
RETAS CONCORRENTES



Retas oblíquas



Retas perpendiculares



Feixe de paralelas

PLANOS CÔNCAVOS E CONVEXOS

Um plano delimitado por segmentos de retas é chamado de polígono e pode ser côncavo ou convexo.

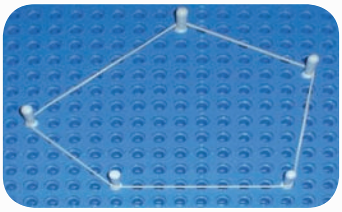


Figura geométrica convexa

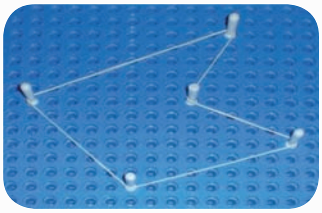
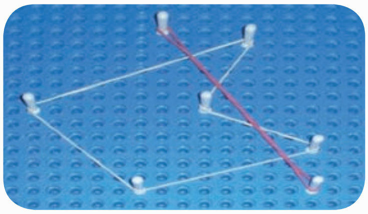
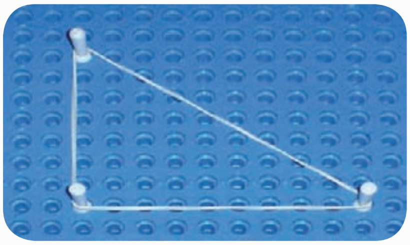


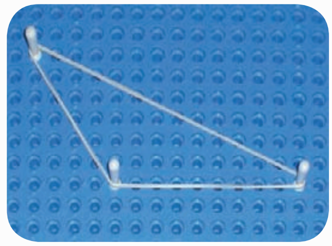
Figura geométrica côncava

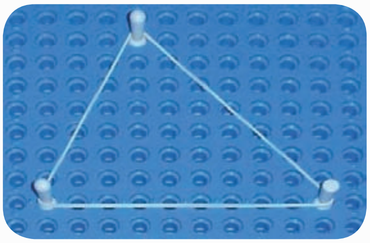


TRIÂNGULOS

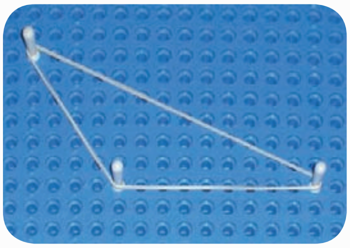
Quanto aos ângulos podem ser:

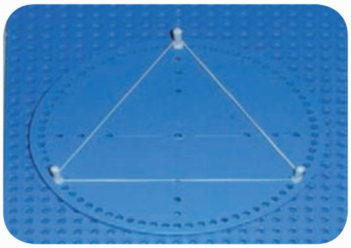

Triângulo retângulo.

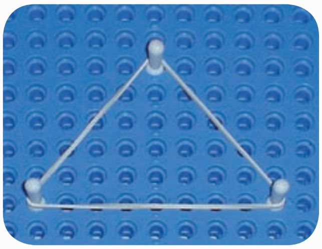

Triângulo obtusângulo.


Triângulo acutângulo.

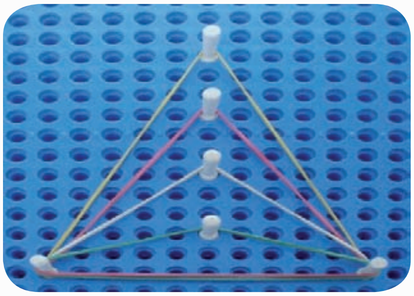
Quanto aos lados:


Triângulo escaleno.

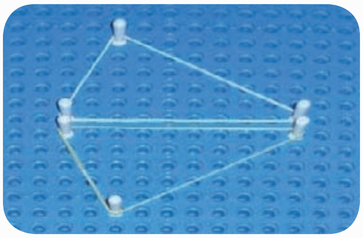

Triângulo eqüilátero. Deve ser construído sobre o **Multiplano** circular, que dá possibilidade de medir seus ângulos.

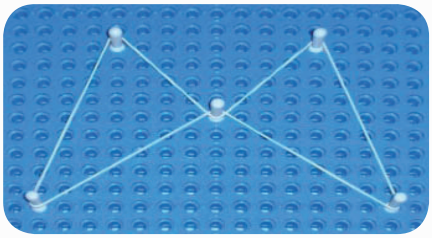

Triângulos isósceleso

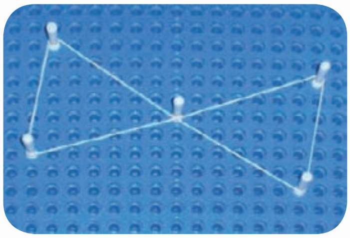
O triângulo isósceles deve ser construído com quantidade impar de furos entre os pinos colocados na horizontal, formando um eixo de simetria na vertical. Assim, todo pino colocado no eixo de simetria, formará um triângulo isósceles.



TRIÂNGULOS CONGRUENTES

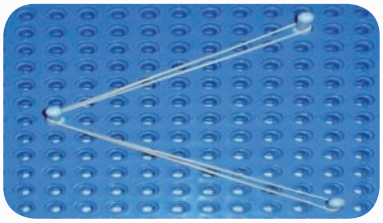




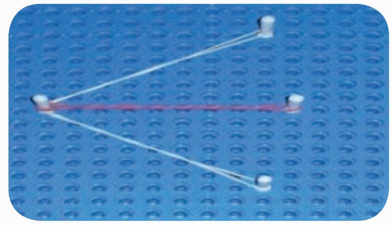


Os pares de triângulos possuem ângulos e lados ordenadamente congruentes.

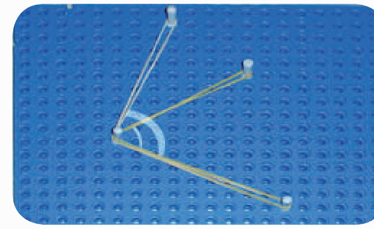
ÂNGULOS



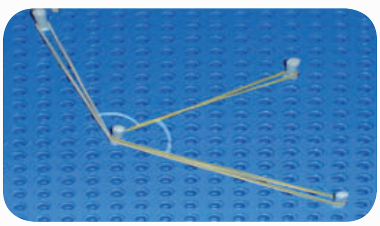
Ângulo: é a reunião de duas semi-retas de mesma origem, não contidas numa mesma reta.



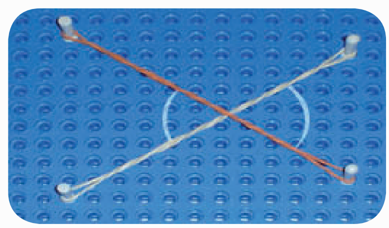
Bissetriz de um ângulo: É a reta que divide um ângulo ao meio.



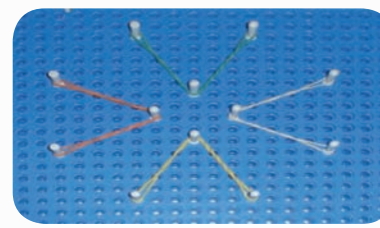
Ângulos consecutivos: Dois ângulos são consecutivos quando um lado de um deles for também lado do outro.



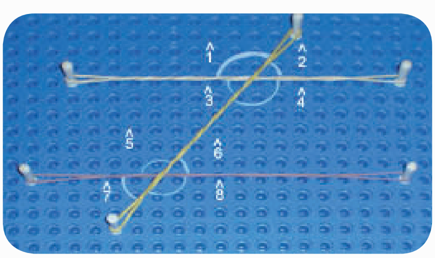
Ângulos adjacentes: Dois ângulos consecutivos são adjacentes se não têm pontos internos comuns.



Ângulos opostos pelo vértice.



Ângulos congruentes.

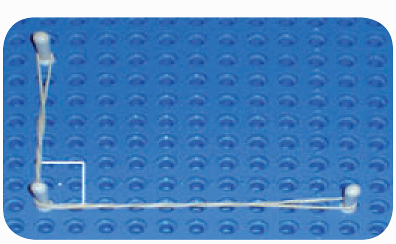


Reta transversal: é o nome dado a uma reta que cruza as retas paralelas.

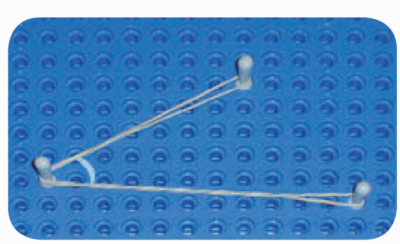
As relações entre os ângulos de duas retas paralelas e uma transversal são:

Ângulos opostos pelo vértice; $\hat{1}$ e $\hat{4}$; $\hat{2}$ e $\hat{3}$; $\hat{5}$ e $\hat{8}$; $\hat{6}$ e $\hat{7}$

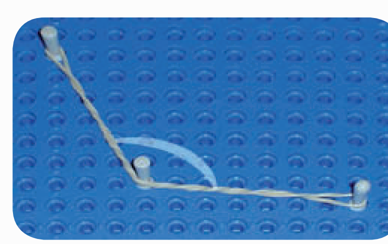
Ângulos de mesma medida; $\hat{1}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$ e $\hat{3}$; $\hat{5}$, $\hat{8}$, $\hat{6}$ e $\hat{7}$



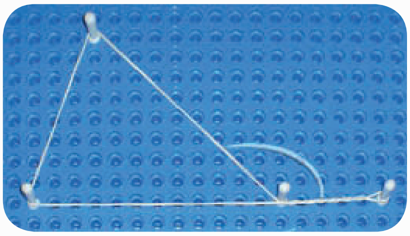
Ângulo reto: mede 90º, basta colocar dois pinos em uma mesma linha, e um outro numa coluna que já possui um ponto.



Ângulo agudo: É um ângulo que mede menos que 90º.

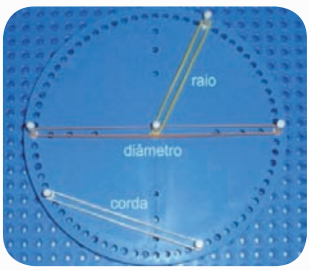


Ângulo obtuso: É um ângulo de medida maior que 90º.

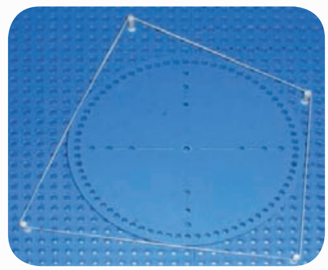


Ângulo externo

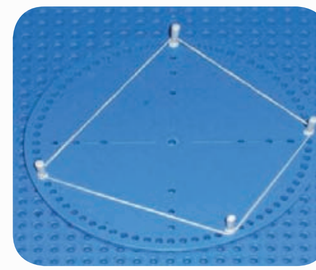
ELEMENTOS DE UMA CIRCUNFERÊNCIA



O diâmetro divide o círculo em dois semi-círculos.

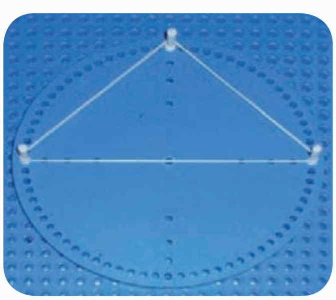


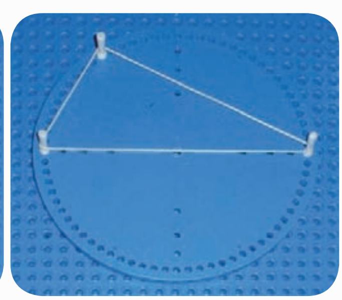
Quadrilátero circunscrito.

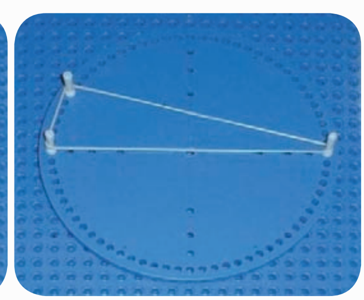


Quadrilátero inscrito.

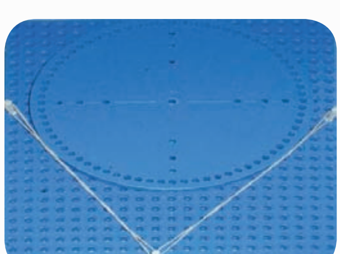
TRIÂNGULO RETÂNGULO INSCRITO



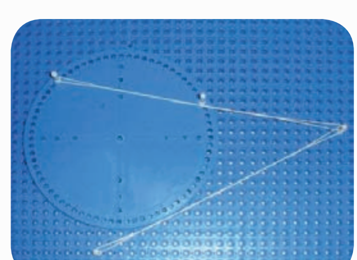




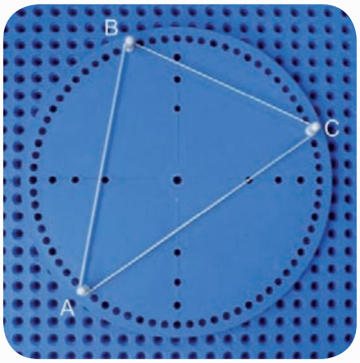
Todo triângulo com vértices nos extremos do diâmetro de um círculo e um ponto sobre a circunferência, será um triângulo retângulo:



Segmentos tangentes: toca a circunferência em um único ponto.



Segmentos: Tangente e secante. O segmento secante corta a circunferência em dois pontos.



Método de RUFE:

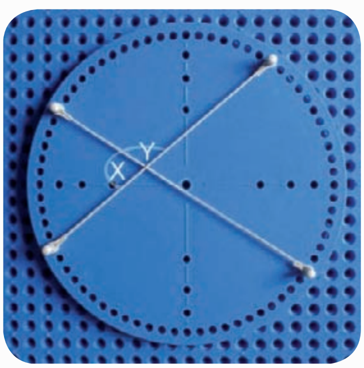
1- Cada ângulo de um triângulo inscrito no Multiplano circular é igual ao número de furos mais um, do lado oposto ao ângulo interno desse triângulo, multiplicado por cinco e dividido por dois.

Ou seja, basta contar a quantidade de furos mais 1 do lado oposto ao ângulo desejado, multiplicar por 5 (graus entre os furos) e dividir por 2 (metade de uma volta 360º). Assim temos:

$\hat{A} = (17 + 1) \times 5 \div 2 = 45^\circ$;

$\hat{B} = (29 + 1) \times 5 \div 2 = 75^\circ$;

$\hat{C} = (23 + 1) \times 5 \div 2 = 60^\circ$.



Método de RUFE:

2- Os ângulos opostos pelo vértice formados pela intersecção de retas que cruzam em qualquer ponto interno do **Multiplano** circular é igual à média dos furos entre os pinos dos lados opostos aos ângulos mais um, multiplicado por cinco.

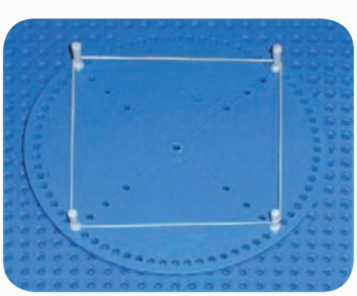
Assim:

$\hat{X} = [(10 + 17) \div 2 + 1] \times 5 = 72{,}5^\circ$;

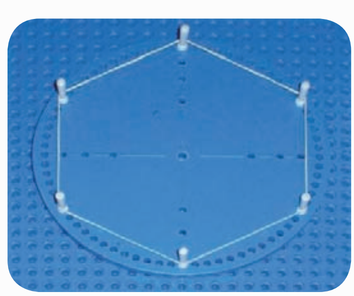
$\hat{Y} = [(18 + 23) \div 2 + 1] \times 5 = 107{,}5^\circ$

FIGURAS REGULARES

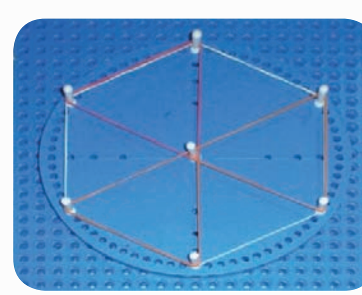
Toda figura regular é inscritível.



Quadrado

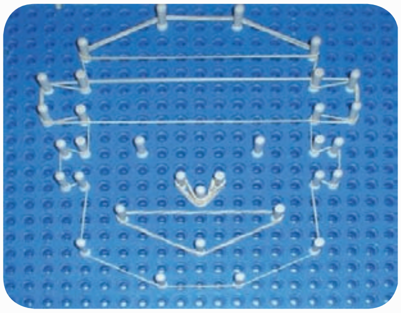
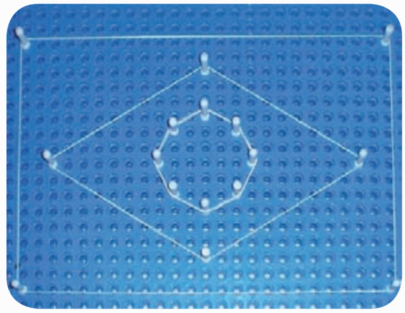
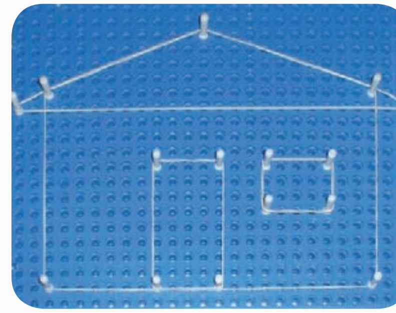
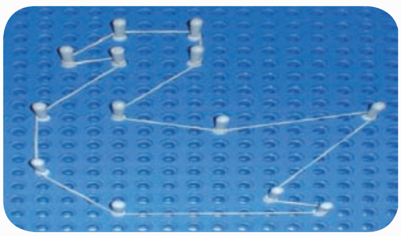
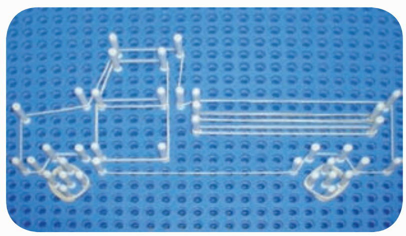
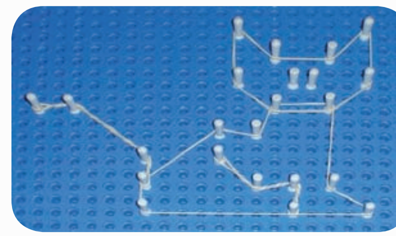
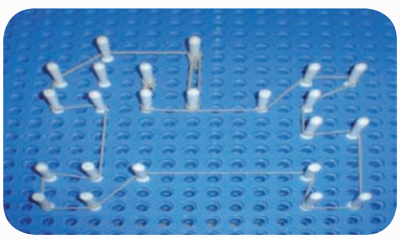
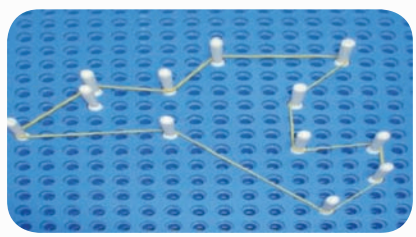
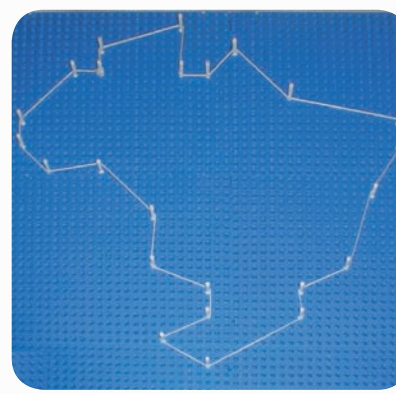


Hexágono regular



As diagonais juntamente com os lados do hexágono regular formam 6 triângulos eqüiláteros.

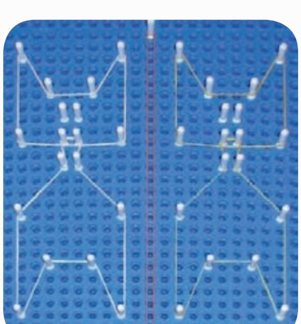
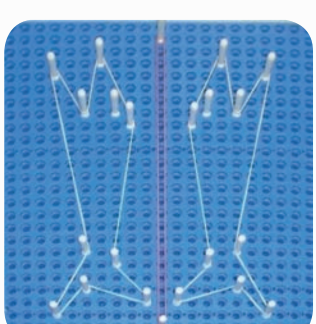
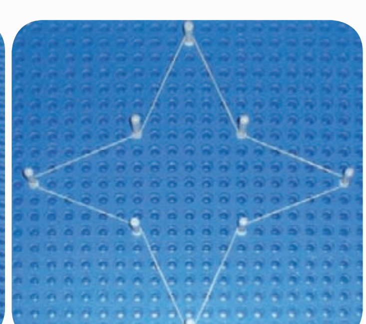
DESENHOS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS E ANIMAIS

Epa!
Não corte as penas de
minhas asas, se fizer isso, posso
perder a simetria e não conseguirei
voar!

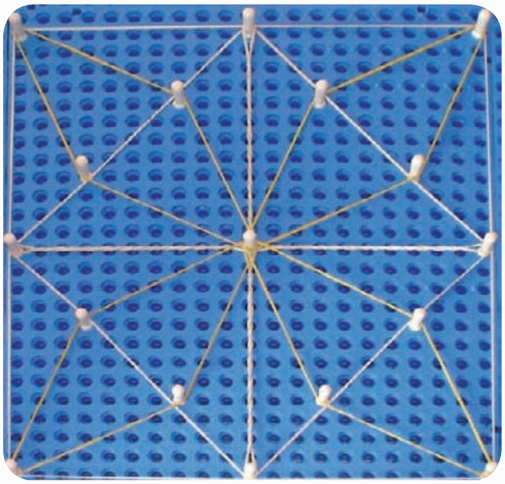
FIGURAS SIMÉTRICAS

Figura simétrica: corresponde à forma ou arranjo, de partes em lados opostos de um plano, reta ou ponto considerado o eixo simétrico, tendo cada parte em um lado, a sua contraparte, em ordem reversa, forma eqüidistante, espelhada. Encontramos a simetria em muitas coisas que nos cercam.

Aqui
tem a figura de
uma estrela com qua-
tro eixos de simetria,
Identifíque-os.

MOSAICOS

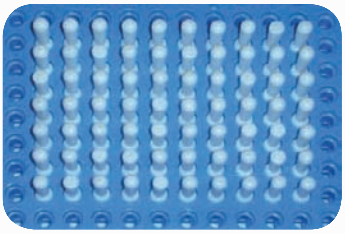


Mosaico construído com pinos e elásticos.

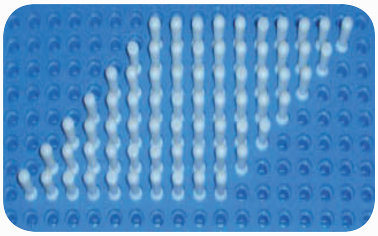
CÁLCULO DE ÁREA

Partindo do conceito da tabuada, pode-se introduzir o cálculo de área.

Área do Quadrado com a utilização de pinos: Para calcular a área do quadrado, basta multiplicar o número de pinos da base pelo número de pinos da altura. Onde na figura temos: 6 x 6 = 36 UA.

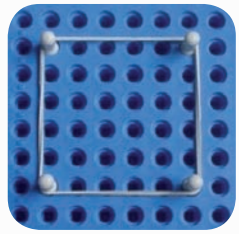


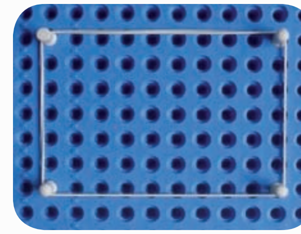
Área do retângulo com pinos: Para o retângulo segue o mesmo procedimento, multiplicamos o comprimento pela largura. 10 x 7 = 70 UA.



Área do Paralelogramo com pinos: Podemos perceber que os pinos do retângulo foram alterados em sua posição formando um paralelogramo de mesmo comprimento e altura, apresentando a mesma área 10 x 7 = 70 UA.

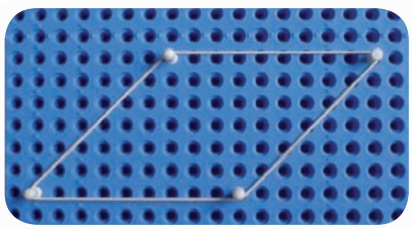
Lembre-se: os pinos dos vértices estão tapando furos.

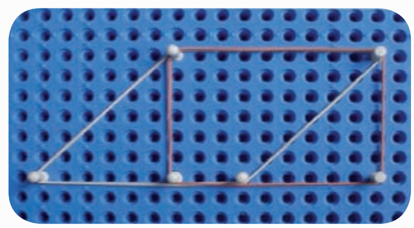




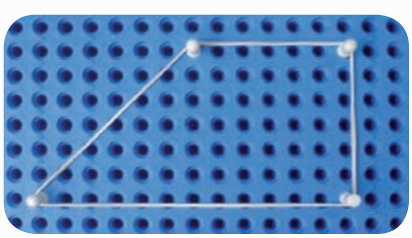
Podemos também trabalhar a área contornando a figura com um elástico e fazer a contagem dos furos juntamente com os pinos que formam os vértices da figura, assim temos no quadrado: 6 x 6 = 36 UA.

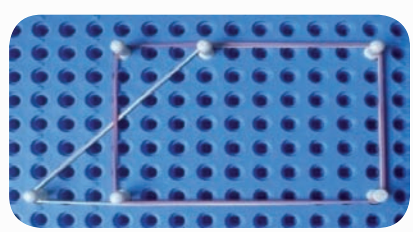
A área do retângulo apresenta um contorno de 10 por 7, onde são contornados 70 UA.



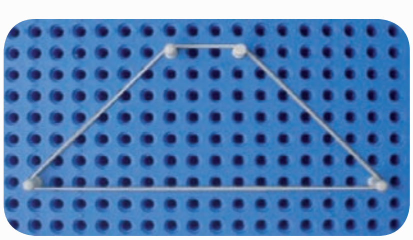


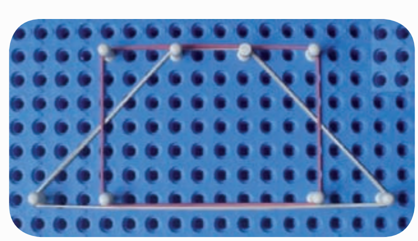
Projetando os pontos do segmento superior no segmento inferior, e contornando com um elástico, é fácil perceber que a área do paralelogramo é igual à área do retângulo. Perdeu-se uma área de um triângulo à esquerda, ganhou-se uma área no lado direito, mantendo a mesma área do retângulo que é o produto da base pela largura.



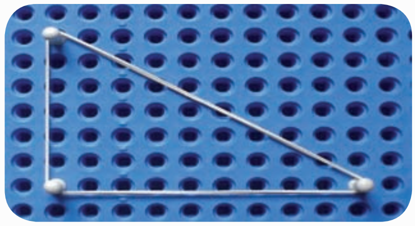


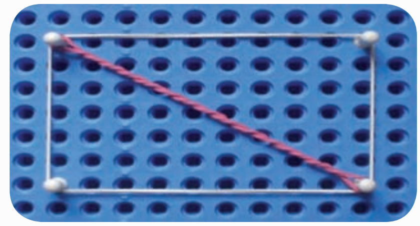
Construindo sobre o trapézio, um retângulo com medida da base igual a média da soma dos pontos superiores com os inferiores, temos um retângulo com mesma área.



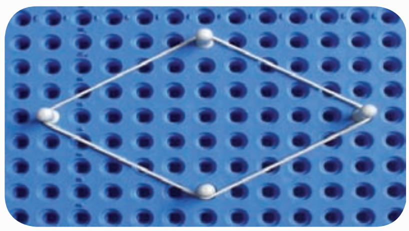


Vamos conferir: 4 furos no segmento superior e 16 no segmento inferior, temos; (4 + 16) ÷ 2 = 10, agora vamos multiplicar a média dos segmentos pela altura 10 x 7 = 70 UA.

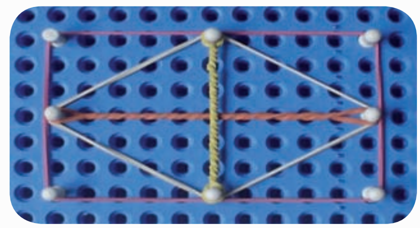




Para interpretar o cálculo da área do triângulo, basta retirar um pino do retângulo e imediatamente formará o triângulo retângulo com a metade da área do retângulo.



Área do Losango com pinos e elásticos.



Área do Losango dentro do Retângulo.

Para montar o losango, devemos deixar uma quantidade impar de furos entre os pinos de uma mesma linha ou coluna, formando uma simetria, então ligamos os pinos com elásticos para desenhar o losango, em seguida montamos um retângulo que tenha o comprimento igual a maior diagonal do losango e largura igual a diagonal menor, comparando a figura podemos perceber que a área do retângulo formada é o dobro da área do losango. Assim podemos concluir que a área do losango será a metade do produto da diagonal maior pela menor: 11 x 7÷ 2 = 38,5 UA.

TEOREMA DE PICK

Seja um polígono cujos vértices são pontos do reticulado.

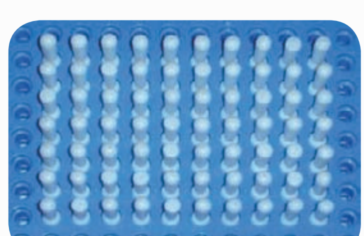
Aos pontos que estão sobre as arestas do polígono chamamos pontos fronteira e aos que estão no interior do polígono chamamos pontos interiores. O polígono diz-se simples quando não possui buracos no seu interior, nem intersecções das suas arestas.

O teorema seguinte foi descoberto em 1899 por **Georg Alexander Pick** e permite calcular a área de um polígono simples contando o número dos seus pontos de fronteira e o número dos seus pontos interiores.

Cálculo da área pelo teorema de Pick

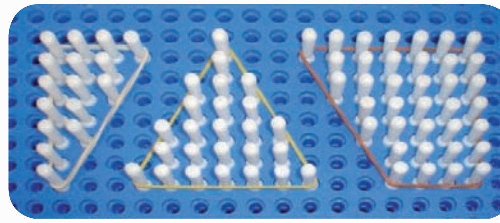
Dado um polígono simples de área "A", sejam "p" o número de pontos de fronteira, e "i" o número de pontos interiores, então a área desse polígono é dada pela seguinte expressão $A = p \div 2 + i - 1$

Veja a figura:



Agora vamos dividir o retângulo em três figuras diferentes:

Para calcular a área pelo teorema de Pik não vamos considerar a quantidade de pinos e sim os intervalos entre os pinos. A figura ao lado contém 9 intervalos por 6 intervalos, dando uma área igual a 9 x 6 = 54 UA.



Primeira figura p = 12; i = 4 $\quad A_1 = 12 \div 2 + 4 - 1 = 9$

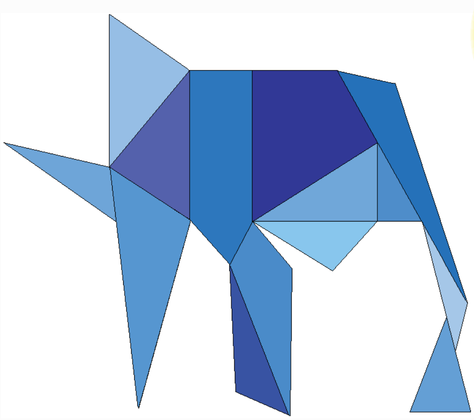
Segunda figura p = 12; i = 13 $\quad A_2 = 12 \div 2 + 13 - 1 = 18$

Terceira figura p = 18; i = 19 $\quad A_3 = 18 \div 2 + 19 - 1 = 27$

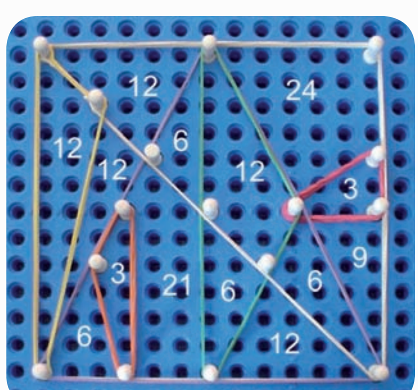
Logo temos: $A_1 + A_2 + A_3 = 9 + 18 + 27 = 54$

O Teorema de Pick é fascinante porque nos permite calcular a área de um polígono simples a partir da contagem de pontos do reticulado. É de fato surpreendente que seja possível substituir o processo habitual de cálculo de uma área, que envolve medições de grandezas contínuas, por uma contagem de grandezas discretas.

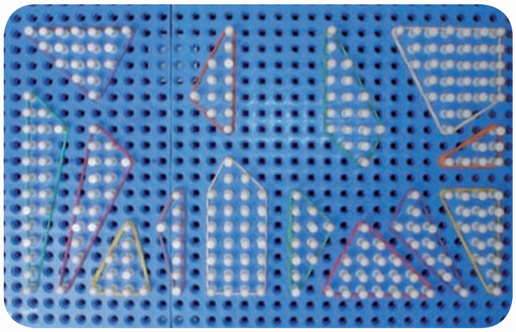
STOMACHION



O ***Stomachion*** é um quebra-cabeça inventado/estudado por Arquimedes. É também um conjunto de 14 figuras geométricas que, juntas, formam um quadrado.



Se considerarmos o quadrado delimitados pelos elásticos com 12 unidades de comprimento e largura, temos uma área total de 144 unidades de área, assim distribuídas.



Que legal!
Uma figura repartida em tantas partes e todas elas com área formada por números naturais.

Para confirmar a área de cada figura geométrica pode-se aplicar o Teorema de **Pick.**

GRÁFICOS DE ESTATÍSTICA

Conteúdos referentes à Estatística também podem ser concretizados com auxílio do **Multiplano**, como por exemplo, a construção de gráficos, o que facilita, principalmente ao cego, a leitura dos mesmos.

O professor pode propor aos alunos que, em grupos, elaborem uma pesquisa qualquer e que construam, com os dados obtidos, um gráfico da mesma. Vai imperar a criatividade dos alunos ao escolherem o tema a ser verificado. Podem coletar à idade dos membros da classe ou a cor preferida, quantos possuem carro, enfim, diversos podem ser os assuntos. Recolhidos os dados podem fazer uma análise dos resultados (média, mediana, moda, etc.) para então terem condições de construírem os gráficos. Dessa forma, todos os conceitos abstratos podem ser feitos na prática e demonstrados a toda turma. Mesmo alunos cegos, e principalmente eles, poderão participar dos grupos e analisar os resultados de forma efetiva e não como meros expectadores.

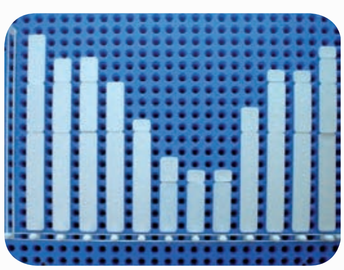


Gráfico utilizando as barras gráficas.

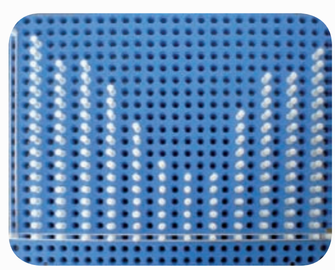


Gráfico de pontos: Representa a quantidade mensal de sorvete que uma criança consumiu durante um ano.

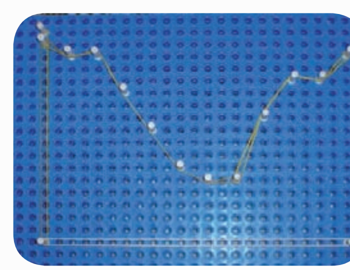


Gráfico de linha.

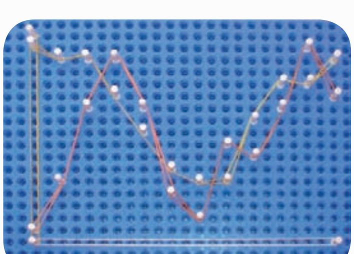


Gráfico de linha de forma comparativa.

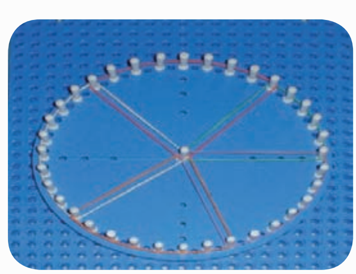
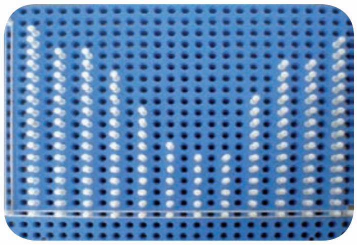
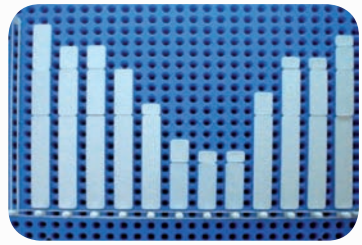
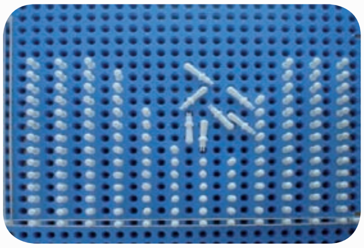
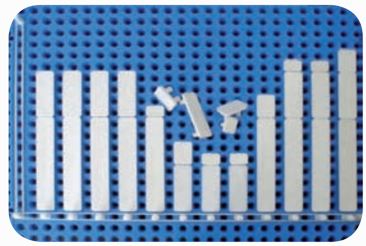


Gráfico de setores no Multiplano Circular

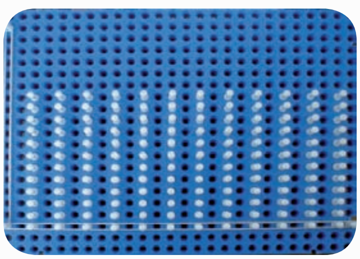
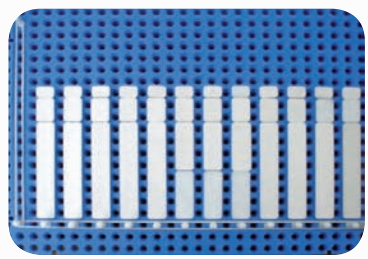
Em estatística existe muitos cálculos e muitas formas de representar. Aqui temos apenas algumas situações.

A média aritmética: é o mesmo que encontrar o ponto de equilíbrio entre as diferenças. As quantidades maiores transferem para às menores até criar uma igualdade.

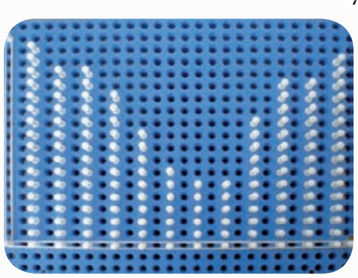
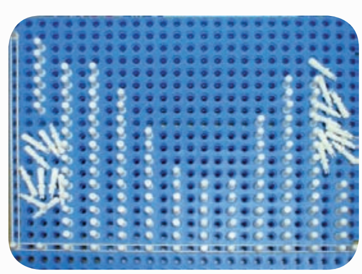
 

Os valores mais altos transferem unidades para os mais baixos.

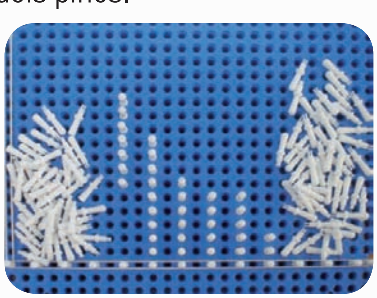
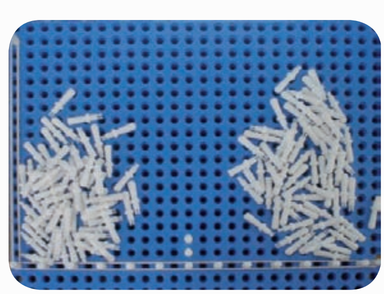
 

Eis a média mensal do consumo de sorvetes.

Mediana: É o ponto central de uma distribuição de dados.

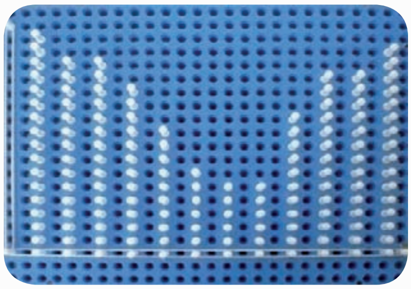
Para encontrar o mês mediano, vamos retirar um pino de cada lado. Assim sucessivamente até sobrar um ou dois pinos.

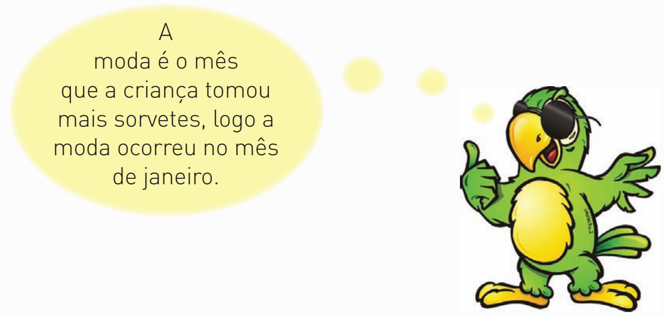
 

Se a quantidade de pinos for impar, resta 1 e se for par, restam dois pinos.

Assim a quantidade mediana de sorvete ocorreu no mês de junho. Ou seja, 50% dos sorvetes foram saboreados antes do mês de junho.

MODA

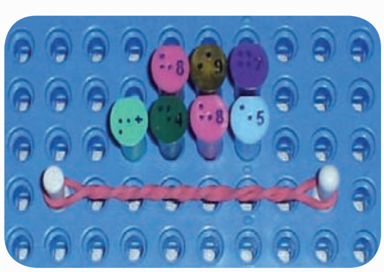


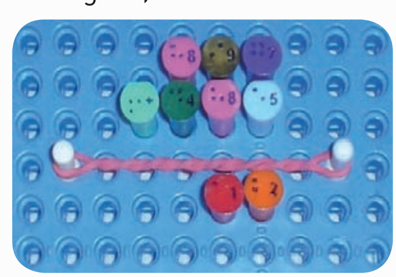


OPERAÇÕES COM PINOS IDENTIFICADOS EM BRAILLE E INDU-ARÁBICO

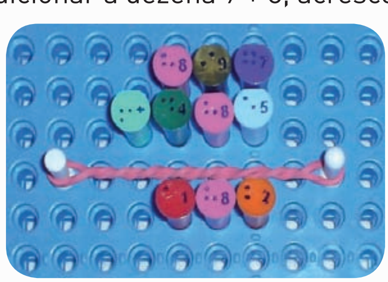
As operações matemáticas que servem de alicerce para todos os outros cálculos – adição, subtração, multiplicação e divisão – são possíveis de serem efetivadas no **Multiplano** através do mesmo algoritmo que um aluno vidente normalmente utiliza no caderno, diferenciando-se apenas por ser mais concreto. Para tanto os pinos identificados são transcritos na mesma linha para formar o primeiro número, enquanto que o sinal da operação e o conjunto dos outros pinos que formam o segundo número são colocados numa linha abaixo. A operação em si, e seu resultado, é separada pelos elásticos, simulando exatamente da mesma forma os traços comumente feitos pelos alunos que enxergam para indicar a igualdade.

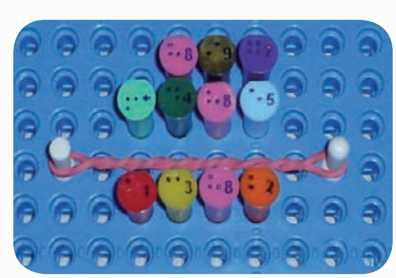
A seguir temos um exemplo de soma: o número "897" é adicionado ao "485". Para efetuar essa adição, basta que sejam colocados os pinos correspondentes aos números da primeira parcela em uma linha (897) e, em uma linha abaixo, coloca-se o conjunto de pinos que forma a segunda parcela da conta (485), sempre respeitando a ordem de alinhamento: unidade abaixo de unidade, dezena com dezena, centena com centena, etc. Não é aconselhado colocar o "vai um", adiciona-se o 7+5 e anota a resposta 12 embaixo, conforme a figura;





Ao adicionar a dezena 9 + 8, acrescenta-se o 1; 9 + 8 + 1 = 18

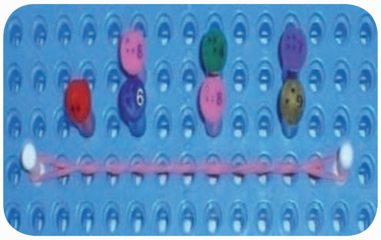


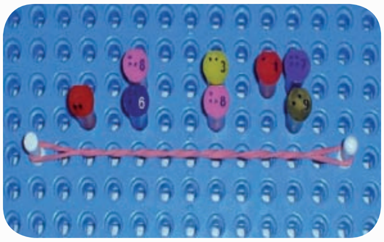


Soma: 897 + 485 = 1382

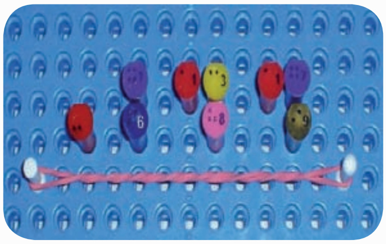
Para finalizar, basta que a soma seja efetuada colocando-se o resultado (1382) de forma alinhada e logo abaixo do elástico, que no caso simboliza o sinal de igual.

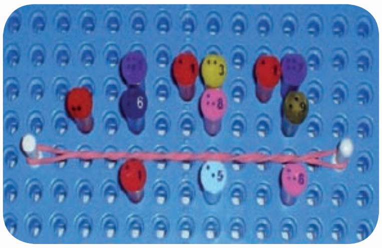
Na subtração, como pode ocorrer de os números do subtraendo serem menores do que os do minuendo e, por isso mesmo haver necessidade de fazer a transformação (empréstimo), faz-se necessário que haja dois furos livres entre as posições decimais, afim de facilitar o deslocamento das quantidades de uma unidade maior para uma menor. A seguir tem-se a subtração de "689" em "847" onde, como a unidade "7" do subtraendo não foi suficiente para que fossem descontadas "9" unidades, foi adicionada a essa unidade uma dezena, deslocada do subtraendo, para daí sim o processo ser continuado, uma vez que de "17" é possível retirar "9", restando "8" unidades. No alinhamento das dezenas dessa operação, o "empréstimo" novamente foi necessário: deslocou-se uma centena das "4" do subtraendo, formando "13" dezenas, possíveis de serem descontadas "8", restando "5". Na posição das centenas, subtraiu-se 6 centenas de 7, restando 1, findando a operação sem maiores problemas.





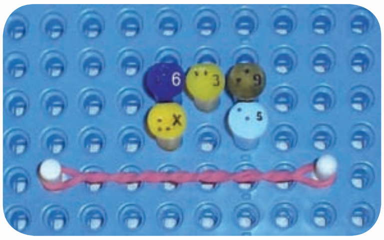
Coloque os números separados por dois furos, para que seja possível realizar a trnasformação.

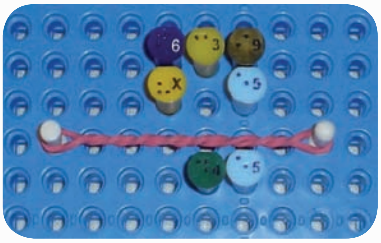




Fazer toda a transformação antes de iniciar a subtração. Subtração: 847 – 689 = 158

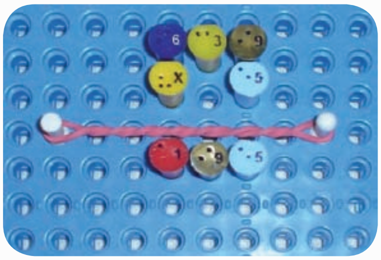
Os exemplos de multiplicação e divisão seguem o mesmo algoritmo de uma operação feita por um vidente com auxílio de lápis ou caneta. Lembre-se de colocar o produto embaixo.

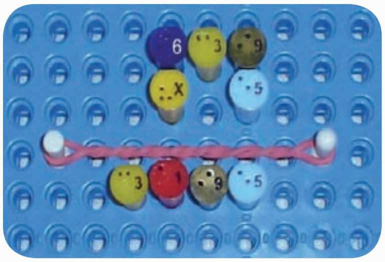




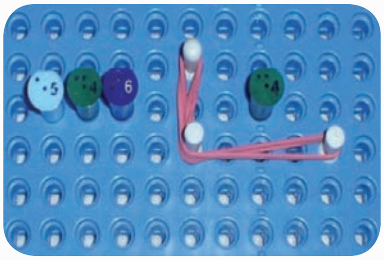
Multiplicação: 639 x 5 =

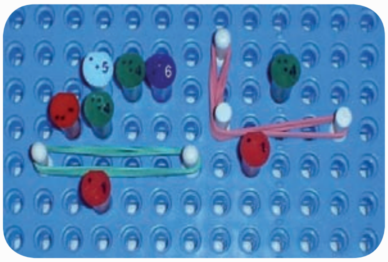
O produto de 5 x 9 = 45 unidades é colocado embaixo e ao produto de 5 x 3 = 15, adicionamos o 4 e o resultado será 15 + 4 = 19 dezenas.



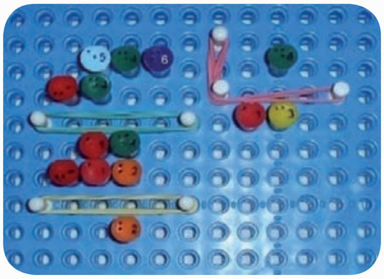


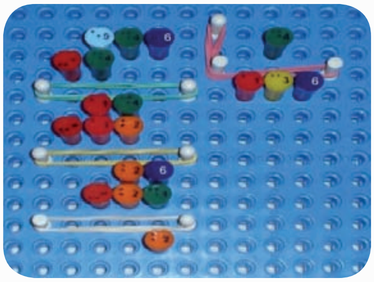
Multiplicação: 639 x 5 = 3195





Divisão do número 546 ÷ 4 =

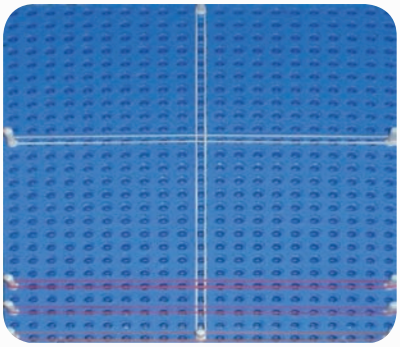




Divisão: 546 ÷ 4 = 136 e sobra resto 2.

PLANO CARTESIANO

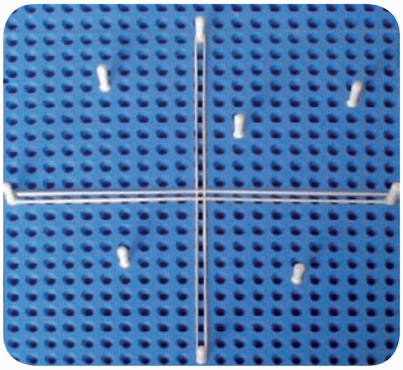
As atividades matemáticas que englobam construção de gráficos e todas as suas implicações são possíveis de serem realizadas no **Multiplano**. As retas do plano cartesiano que representam os eixos “x” e “y” estão em relevo. Para facilitar a visualização, pode-se fixar pinos nos extremos de cada reta: Um deles precisa estar disposto horizontalmente (eixo x) e o outro, na mediatriz da abscissa, disposto verticalmente (eixo y). Delimitados os eixos, por conseqüência direta, o plano fica dividido em quatro quadrantes, exemplificado a seguir, o que possibilita diversas análises do conteúdo:



Plano cartesiano montado no **Multiplano** (eixos x e y)

LOCALIZAÇÃO DOS PONTOS CARTESIANOS

Para localizar um ponto nesse plano, por exemplo, o par ordenado (8, 6), ou seja, “8” para “x” e “6” para “y”, o aluno, em primeiro lugar, precisa localizar o ponto de origem (0,0), situado na intersecção das retas que representam os eixos. Então, basta que deslize seus dedos sobre os elásticos em consonância com o número respectivo do par ordenado. Assim, para o par (8, 6), desliza oito pontos à direita (eixo x) e seis furos acima (eixo y). Para finalizar, basta que vá deslizando os dedos, respeitando o quadrante, até que os mesmos se encontrem. Pronto, esse encontro simboliza o par ordenado, daí é só marcá-lo com um pino. Para facilitar esse processo pode utilizar pinos quando localizar os pontos sobre os eixos principais, para depois procurar a intersecção dos mesmos. A observação do uso do material por deficientes visuais resultou na constatação de que o aluno adquire prática com uma facilidade incrível e, em pouco tempo, a abstração já se torna realidade.



Pontos do plano: (8,6); (2,4); (-5,7); (-4,-4); (5,-5).

GRÁFICOS

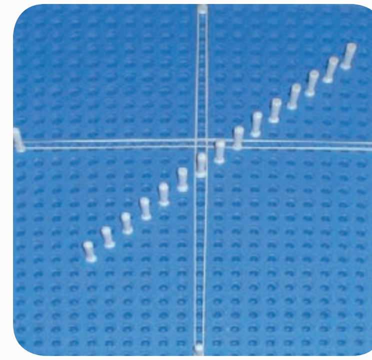
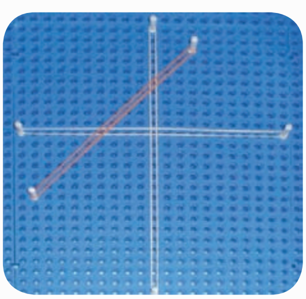


Gráfico da função f(x) = x - 2, apenas com coordenadas formadas por números inteiros.

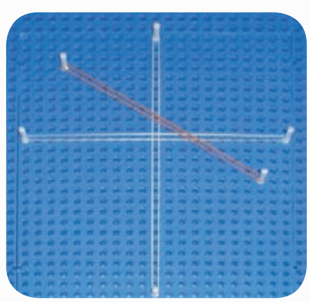
Numa função de 1º grau, dada a equação, o aluno tem condições de determinar alguns pontos resultantes, a fim de facilitar a análise dos fenômenos envolvidos nela. Por exemplo, para "f(x) = x - 2", podem ser encontrado a raiz (2,0). Após o cálculo da raiz, atribuir valores para "x" a direita e a esquerda da raiz. Assim temos os pares ordenados (3,1), (1,-1), (4,2), (0,-2), (5,3), (-1,-3), (6,4), (-2,-4), (7,5), (-3,-5), (8,6), (-4,-6), (9,7), (-5,-7). Após ter em mãos os pontos retirados da equação, marcá-los, um a um no plano. Esses pontos quando ligados, por se tratar de uma equação de 1o grau, resultam em uma reta, de números inteiros.

Para facilitar, podemos localizar dois pontos e ligar com um elástico para representar uma reta formada por números reais.

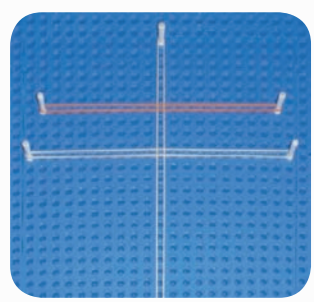
Nesse ponto o aluno poderá observar a inclinação da referida reta e sua relação com a equação, ou seja, dependendo do sinal que acompanha a incógnita "x", ela terá uma ou outra inclinação (se positivo, inclinado à direita. E se negativo, à esquerda).



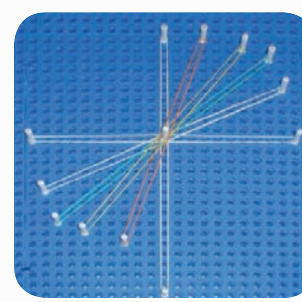
Reta da função afim crescente



Reta da função afim decrescente



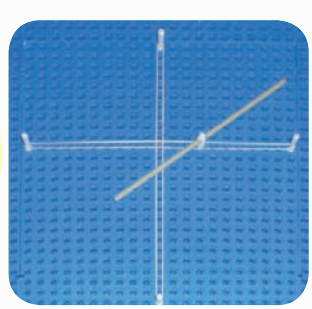
Reta da função constante



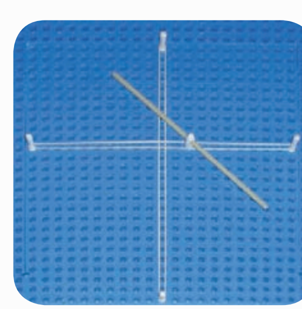
Retas de funções lineares

Depois que o aluno compreendeu o processo, pode fazer somente um esboço da reta resultante da equação, não sendo necessário encontrar ponto a ponto. Esse esboço pode ser representado por uma reta generalizada, como a que está representada a seguir, elaborada a partir de uma haste:

Haste com pino agregado que permite que o aluno marque a raiz da equação, ou seja, o ponto que a reta resultante cruza o eixo das abscissas (x).



Esboço da reta crescente

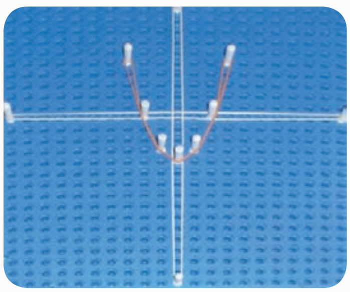


Esboço da reta decrescente

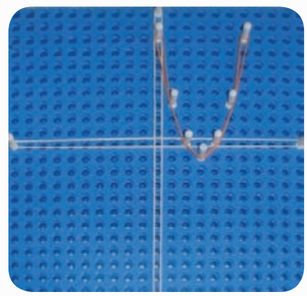
PARÁBOLAS

Na construção de uma parábola, primeiro, calculam-se as raízes se por ventura existir, em seguida atribui o valor para "x" todos os valores entre as raízes, além de um valor menor que a raiz situada a esquerda e um valor maior que a raiz a direita.

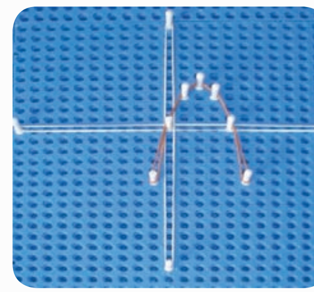
Assim para a curva $y = x^2 - 4$, temos as raízes -2 e 2 vamos atribuir para "x" os valores -1, 0, 1, e os extremos mais próximos das raízes, -3 e 3. Após a escolha dos valores de "x" vamos substituir na equação $y = x^2 - 4$ para encontrar os valores de "y" (-3,5), (-2,0),(-1,-3), (0,-4),(1,-3), (2,0),(3,5). Marcando esses pontos no plano cartesiano temos a parábola:



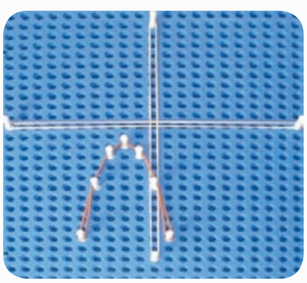
Parábola de $y = x^2 - 4$



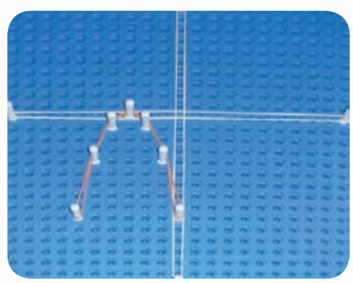
Parábola de $y = x^2 - 6x + 8$



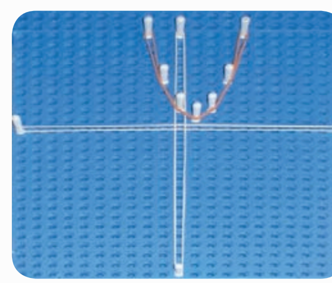
Parábola de $y = -x^2 + 4x$



Parábola de $y = -x^2 - 4x - 6$



Parábola de $y = -x^2 - 6x - 9$



Parábola de $y = x^2 - 2x + 2$

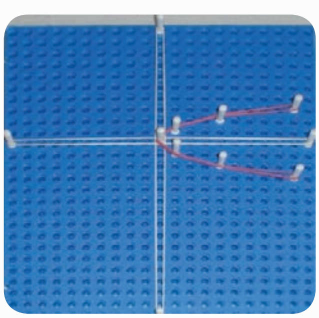


Gráfico de $y = \sqrt{x}$

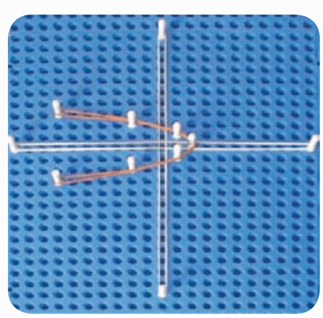


Gráfico de $y = \sqrt{-x + 2}$

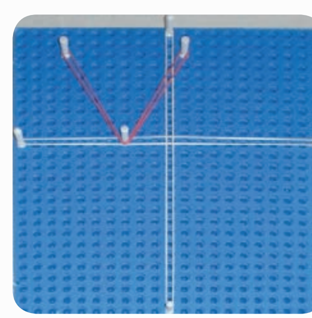


Gráfico de $y = |2x + 6|$

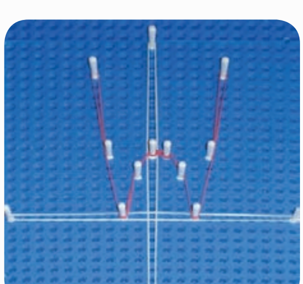
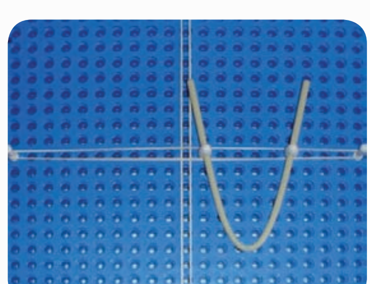


Gráfico de $y = |x^2 - x - 6|$

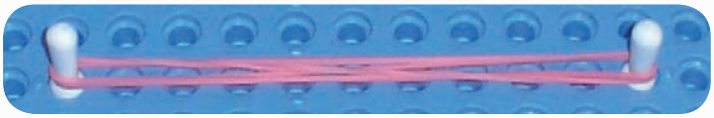


Para facilitar, pode-se fazer somente um esboço da parábola resultante da equação. Esse esboço pode ser representado por uma curva generalizada, com dois pinos para serem colocados nas raízes.

Para facilitar, pode-se fazer somente um esboço da parábola resultante da equação. Esse esboço pode ser representado por uma curva generalizada, com dois pinos para serem colocados nas raízes.

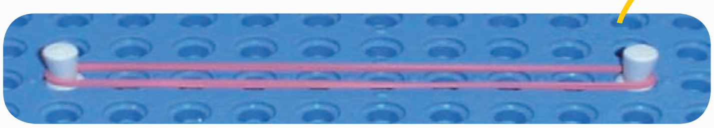
INTERVALOS NUMÉRICOS

Sendo a e b reais com **a** < **b**



Intervalo fechado de extremos **a** e **b**

Superfície Esférica



Intervalo aberto de extremos **a** e **b**

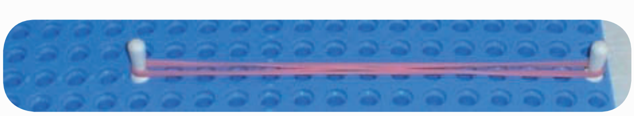
Superfície Plana

Intervalo aberto à esquerda (ou fechado a direita) de extremos **a** e **b**

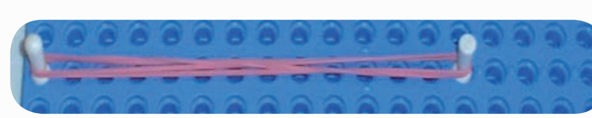
Intervalo aberto à direita (ou fechado a esquerda) de extremos **a** e **b**

INTERVALOS INFINITOS

Quando um número "x" vai para o infinito, coloca-se um pino na extremidade do Multiplano, para simbolizar que o "x" segue para o infinito.



$x \geq a$



$x < a$

$x > a$

$x \leq a$

INEQUAÇÕES

Sabendo como se concretiza as funções de 1º e 2º graus, o aluno tem condições de fazer análises relativas a uma função produto e/ou quociente, inequações etc. Para tanto, elásticos podem ser anexados ao **Multiplano**, logo abaixo do plano cartesiano, para que possa estudar a variação do sinal dentro do conjunto dos números reais. O número de elásticos dependerá do número de funções envolvidas no processo: cada linha demarcada abaixo do plano cartesiano representa uma função (S_1 e S_2) e o último (S_1 X S_2), o resultado do produto ou do quociente entre os sinais. A seguir um exemplo de uma função produto "$f(x) = (-x - 5)(x^2 - 6x + 5)$". Para resolvê-la, o aluno constrói o gráfico de cada polinômio pertencente ao produto no mesmo plano cartesiano. Isola as funções e as calcula de modo separado; localiza a raiz de $-x - 5 = 0$, $x = -5$ e faz um esboço do gráfico da mesma através da reta generalizada. Localiza a raiz $x = -5$, introduz o pino, gire a haste para representar uma reta decrescente. A partir da coluna da raiz, desça até que encontre a primeira reta abaixo do plano (S_1). Marca o ponto através de um pino em "S_1" e, com auxílio do gráfico, analise a variação dos sinais desta função. Verifica em que intervalo a região do gráfico é positiva, marca em "S_1" com elástico esse intervalo. Para esta primeira função a raiz é "-5" e a inclinação do gráfico se dará à esquerda. Assim, para os valores de "x" menores que "-5" a região do gráfico é positiva, para os maiores, negativa. Feito o estudo da primeira função e marcados os resultados em "S_1", o esboço não é mais necessário, podendo ser retirado. Então, o aluno fará a análise da segunda função, procedendo como na primeira: localiza as raízes (1 e 5), faz um esboço do gráfico, marca essas raízes na segunda linha abaixo do plano (S_2) e faz o estudo do sinal da função, anotando nela os intervalos onde fica positiva com auxílio de elásticos. Feito isso, o esboço do gráfico da segunda função pode ser retirado. Para finalizar, irá marcar as raízes de ambos os gráficos na terceira linha abaixo do plano (S_1 x S_2) para que possa fazer o produto dos sinais. Irá deslizar os dedos em cada intervalo separado e analisará o produto dos sinais em cada um deles. Na região que se compõe de dois elásticos significa que se trata de região positiva, onde encontrar apenas um, região negativa.

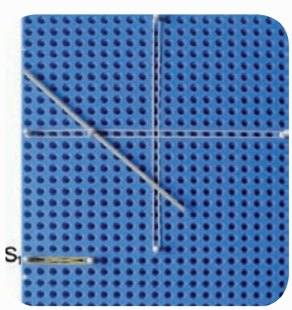


Gráfico de (- x - 5). Abaixo está indicado com elástico a região positiva.

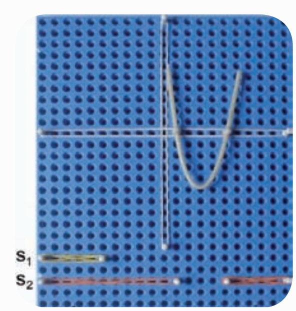
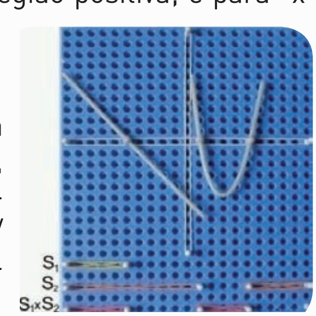


Gráfico de (x^2 - 6x + 5). Abaixo do plano, está indicado com elástico, as regiões positiva.

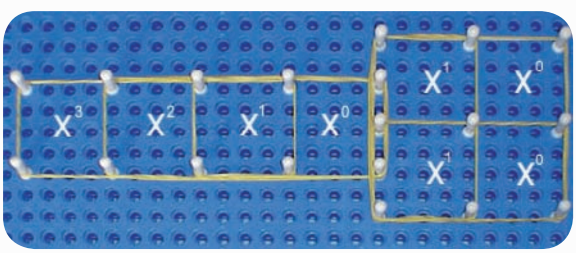
O resultado identificado em "S_1 x S_2" será positivo se os intervalos analisados em S_1 e S_2 tiverem sinais iguais; se diferentes, o resultado será negativo. Assim, para esse exemplo, o produto dos sinais indicou que, para as regiões onde "x" é menor do que "-5", a região é positiva; entre "-5" e "+1", região negativa; valores de "x" compreendidos entre "+1" e "+5", região positiva; e para "x" maior do que "+5", região negativa .



Plano Cartesiano com função produto solucionada, onde S_1 representa a reta generalizada (abaixo, em S_1 foram marcados os resultados dos sinais), S_2 representa a parábola generalizda (abaixo, em S_2 foram marcados os resultados dos sinais), e em S_1 x S_2 são marcados os resultados do produto / quociente da função. A presença de dois elásticos representa região positiva.

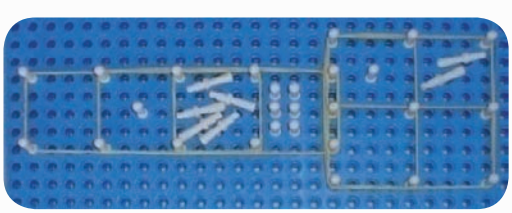
DIVISÃO DE POLINÔMIOS

A divisão de polinômios também é possível de ser trabalhada no **Multiplano**. A foto abaixo apresenta um exemplo de como isso pode ser feito. Os números positivos que acompanham a incógnita de um polinômio, independente do grau do expoente, podem ser representados por pinos "em pé", e os negativos, por pinos "deitados". Para que os pinos não se espalhem e também para delimitar a posição de "x" de acordo com o grau de seu expoente (...,x^3, x^2, x^1, x^0), "quadradinhos" são necessários e podem ser formados através da utilização de elásticos, para que os pinos não se espalhem ou mudem de posição. No exemplo a seguir temos um pino "em pé" na posição onde "x" tem expoente dois (x^2), cinco pinos "deitados" na posição onde "x" tem expoente um (x^1) e seis pinos "em pé" na posição da constante (x^0), identificando o polinômio como sendo "$+ x^2 - 5x + 6$", no caso o dividendo da operação. Ao lado, ligeiramente, acima, temos representado o polinômio "$+ x - 2$", que é o divisor da conta. Abaixo do divisor é colocado o quociente da divisão, nesse caso "$+ x - 3$". A resolução segue os mesmos procedimentos do aluno que anota no caderno, com o diferencial de usar, ao invés de algarismos, pinos, uns representando números positivos e outros negativos. Ele identifica o grau do expoente da incógnita de acordo com a posição que ocupa nos "quadradinhos", começando pelo dividendo, com o expoente zero, crescendo em direção a esquerda. Nos espaços reservados ao divisor e ao quociente a posição segue a ordem decrescente, sendo colocados os expoentes de maior grau seguidos dos de menor grau, sentido a direita.

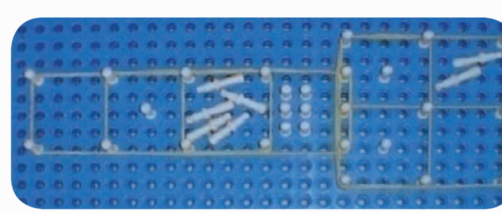


Dentro dos retângulos são colocados pinos que representam os coeficientes de x. Se for positivo o pino é colocado "em pé", se negativo, será colocado "deitado".

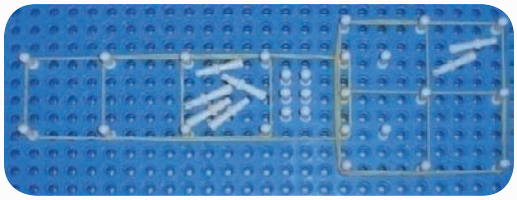
Segue o esquema de montagem de uma operação com polinômios no **Multiplano**:



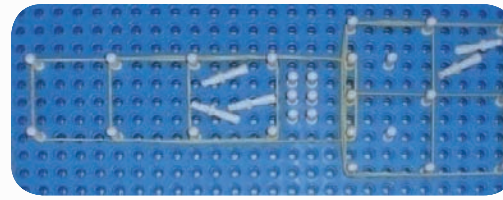
$x^2 - 5x + 6 \;\underline{|\; x - 2 \quad}$



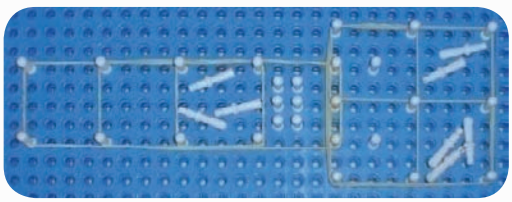
$$\begin{array}{l|l} x^2 - 5x + 6 & x - 2 \\ \cline{2-2} & x \end{array}$$



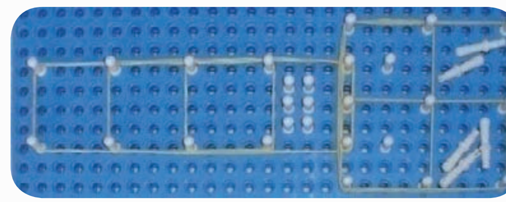
$$\begin{array}{l|l} x^2 - 5x + 6 & x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2} & x \\ 0 & \end{array}$$



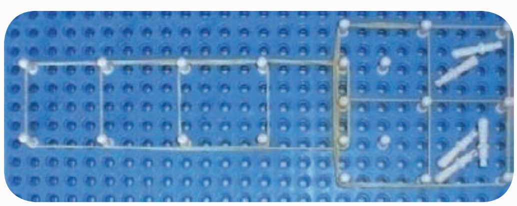
$$\begin{array}{l|l} x^2 - 5x + 6 & x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2 + 2x} & x \\ 0 \ \ -3x & \end{array}$$



$$\begin{array}{l|l} x^2 - 5x + 6 & x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2 + 2x} & x - 3 \\ 0 \ \ -3x + 6 & \end{array}$$

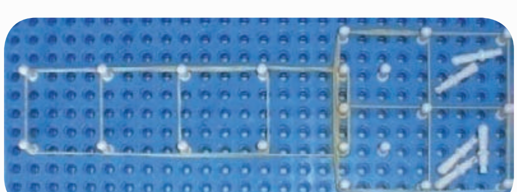


$$\begin{array}{l|l} x^2 - 5x + 6 & x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2 + 2x} & x - 3 \\ 0 - 3x + 6 & \\ \ \ \underline{+3x} & \\ \ \ \ 0 & \end{array}$$

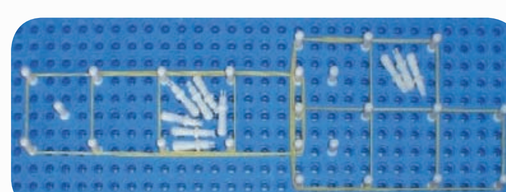


$$\begin{array}{l|l} x^2 - 5x + 6 & x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2 + 2x} & x - 3 \\ 0 \ \ -3x + 6 & \\ \ \ \ \underline{+3x - 6} & \\ \ \ \ 0 \quad 0 & \end{array}$$

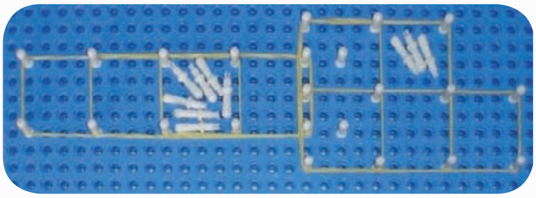
Se porventura algum valor de "x" ficar sem representação, como no caso do polinômio "$+x^3 - 7x$", onde faltam os valores de "x^2" e da constante, os espaços respectivos a esses expoentes de "x" ficam vazios, uma vez que são os "quadradinhos" que estarão indicando qual o grau do expoente da incógnita. Para determinar quantidade de quadrados do quociente, deve-se verificar o grau do dividendo pelo divisor $x^3 \div x = x^2$, então deve-se montar 3 quadrados no quociente. A seguir a divisão de $x^3 - 7x$ por $x - 3$:



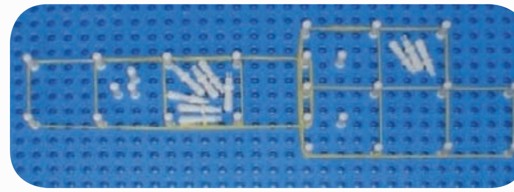
$$\begin{array}{l|l} x^3 + 0x^2 - 7x + 0 & x - 3 \\ \cline{2-2} \end{array}$$



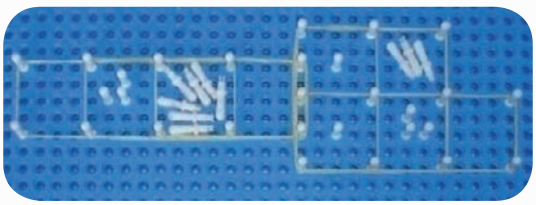
$$\begin{array}{l|l} x^3 + 0x^2 - 7x + 0 & x - 3 \\ \cline{2-2} & x^2 \end{array}$$



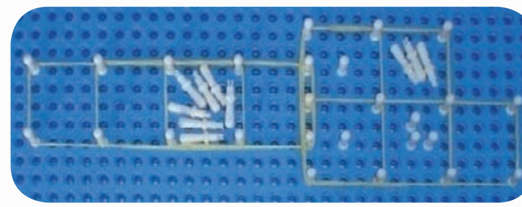
$$\begin{array}{ll} x^3 + 0x^2 - 7x + 0 & \underline{|\; x - 3 \quad} \\ \underline{-\,x^3} & x^2 \\ 0 & \end{array}$$



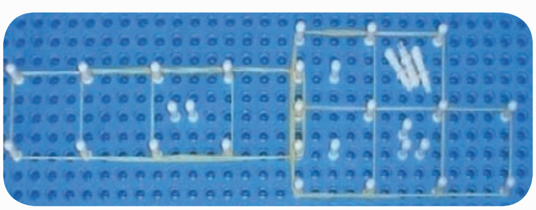
$$\begin{array}{ll} x^3 + 0x^2 - 7x + 0 & \underline{|\; x - 3 \quad} \\ \underline{-\,x^3 + 3x^2} & \\ 0 \;+ 3x^2 & \end{array}$$



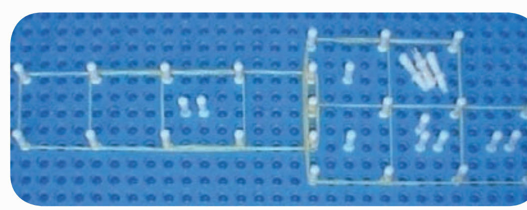
$$\begin{array}{ll} x^3 + 0x^2 - 7x + 0 & \underline{|\; x - 3 \quad} \\ \underline{-\,x^3 + 3x^2} & x^2 + 3x \\ 0 \;\; + 3x^2 - 7x & \end{array}$$



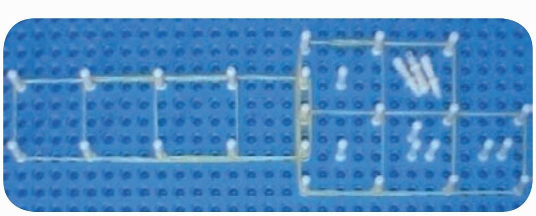
$$\begin{array}{ll} x^3 + 0x^2 - 7x + 0 & \underline{|\; x - 3 \quad} \\ \underline{-\,x^3 + 3x^2} & x^2 + 3x \\ 0 \;+ 3x^2 - 7x & \\ \quad \underline{-3x^2} & \\ \quad\; 0 & \end{array}$$



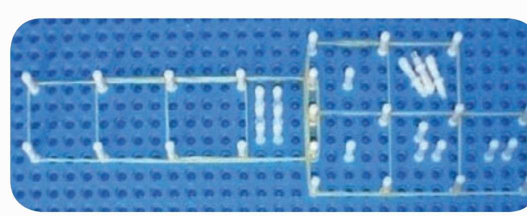
$$\begin{array}{ll} x^3 + 0x^2 - 7x + 0 & \underline{|\; x - 3 \quad} \\ \underline{-\,x^3 + 3x^2} & x^2 + 3x \\ 0 \;+ 3x^2 - 7x & \\ \quad -\underline{3x^2 \;+ 9x} & \\ \quad\; 0 \quad + 2x & \end{array}$$



$$\begin{array}{ll} x^3 + 0x^2 - 7x + 0 & \underline{|\; x - 3 \quad} \\ \underline{-\,x^3 + 3x^2} & x^2 + 3x + 2 \\ 0 \;+ 3x^2 - 7x & \\ \quad \underline{-\,3x^2 \;+ 9x} & \\ \quad\; 0 \quad + 2x + 0 & \end{array}$$



$$\begin{array}{ll} x^3 + 0x^2 - 7x + 0 & \underline{|\; x - 3 \quad} \\ \underline{-\,x^3 + 3x^2} & x^2 + 3x + 2 \\ 0 \;+ \underline{3x^2 - 7x} & \\ \quad -\,3x^2 \;+ 9x & \\ \quad\; 0 \quad + 2x + 0 & \\ \qquad\quad \underline{-\,2x} & \\ \qquad\quad\; 0 & \end{array}$$



$$\begin{array}{ll} x^3 + 0x^2 - 7x + 0 & \underline{|\; x - 3 \quad} \\ \underline{-\,x^3 + 3x^2} & x^2 + 3x + 2 \\ 0 \;+ 3x^2 - 7x & \\ \quad \underline{-\,3x^2 \;+ 9x} & \\ \quad\; 0 \quad + 2x + 0 & \\ \qquad\quad \underline{-\,2x \;+ 6} & \\ \qquad\quad\; 0 \;+ 6 & \end{array}$$

LOCALIZAÇÃO DE NÚMEROS DECIMAIS

Para a construção de gráficos com variáveis que assumem valores decimais, deve-se acoplar várias placas deste material, a fim de representar os números decimais. Para isso, devemos colocar um pino a cada 10 furos para indicar os números inteiros. Vejam nas figuras abaixo:

GRÁFICO EXPONENCIAL

Para a construção do gráfico de uma função exponencial, deve-se atribuir para x valores próximos de zero, em seguida substituir na função para encontrar os respectivos valores de f(x):

Assim para as funções temos:

Gráfico da função: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	2	1	0,5	0,25

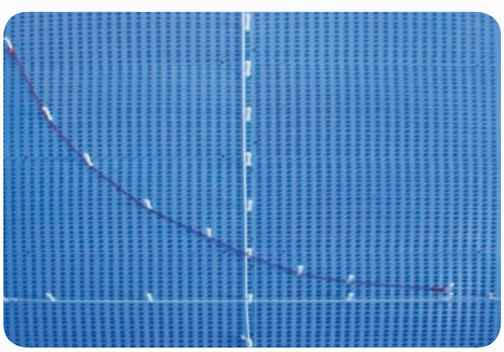


Gráfico da função: $f(x) = \log_2 x$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	2	1	0,5	0,25

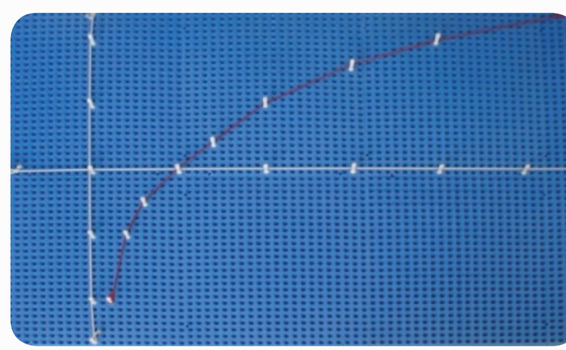
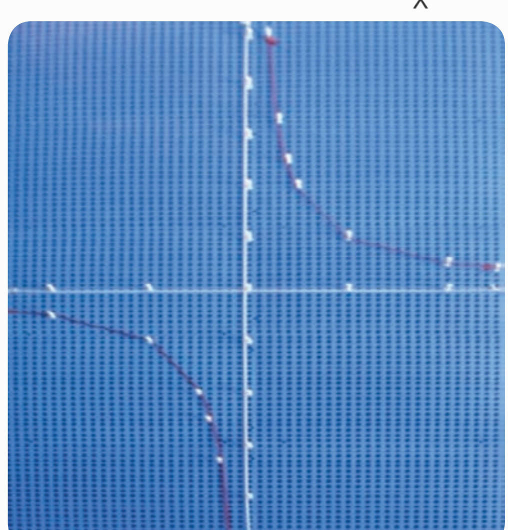
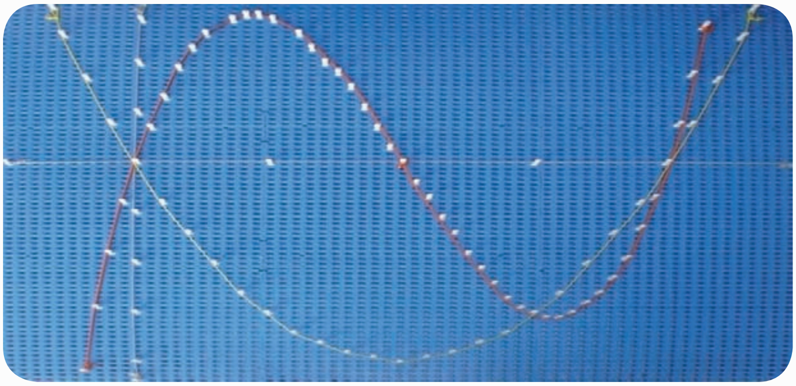


Gráfico da função: $f(x) = \dfrac{1}{x}$



CURVA DO SEGUNDO E TERCEIRO GRAU NO MESMO PLANO



A função $f(x) = x^2 - 4x$ em amarelo e $g(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ em vermelho.

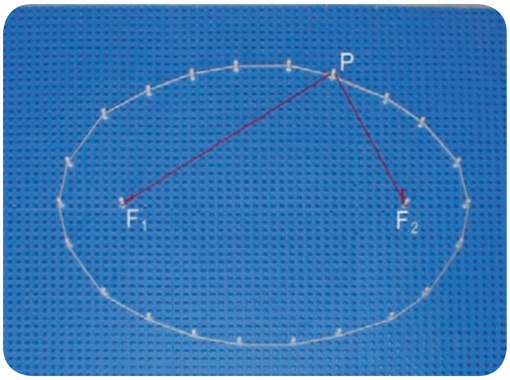
CÔNICAS

ELIPSE: É o conjunto dos pontos de um plano, cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1, F_2 desse plano, é constante.

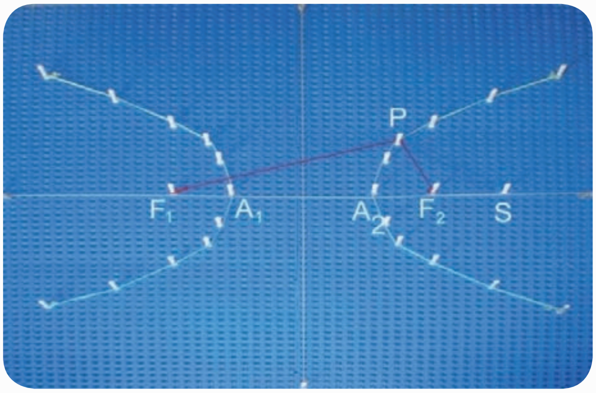
Para construir a elipse, marque dois pontos no plano formado por uma ou mais placas **Multiplanos**.

Coloque dois pinos separados por alguns pontos F_1 e F_2, corte um fio que tenha uma medida maior que a distância entre os dois pontos, em seguida com o auxílio de um pino, estique o fio em qualquer direção.

Ao coincidir com um furo, introduza o pino no mesmo, pegue outro pino e continue o mesmo procedimento até formar a volta completa. È importante ressaltar que, dependendo o tamanho da elipse será necessário um elástico maior.



HIPÉRBOLE: é o conjunto de pontos P de um plano α, tais que a diferença de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 desse plano é uma constante positiva e menor que a distância entre esses pontos fixos.



1º Passo: Acople várias placas Multiplanos consoante ao tamanho que se deseja construir a figura e estique dois elásticos para representar o plano cartesiano;

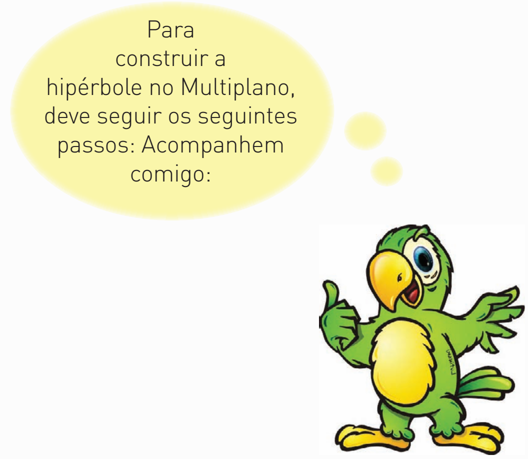
2º Passo: Marque dois pontos no eixo "x" A_1 e A_2, simétricos ao eixo "y" separados por alguns furos;

3º Passo: Marque um ponto F_1 no eixo "x" distando alguns furos do lado esquerdo de A_1, também no mesmo eixo, mantenha a mesma quantidade de furos do lado direito de A_2 e marque F_2;

4º Passo: Marque um ponto S externo a F_1, F_2 na mesma reta;

5º Passo: Corte um barbante de comprimento maior que o grande plano;

6º Passo: Faça um laço em uma das extremidades do barbante;



7º Passo: Prenda o laço do barbante em A_1, estique até S e faça um nó no ponto S.

8º Passo: Coloque o nó em A_2, novamente estique em S e faça um laço em S.

9º Passo: Prenda um laço do lado da maior distância em F_1 e o outro laço em F_2, pegue o nó e estique no sentido do primeiro quadrante, o local que o nó tocar no plano, marque com um pino o ponto P. Passe para o quarto quadrante estique o barbante e marque outro ponto;

10º Passo: Troque os laços, maior distância do laço até ao nó em F_2, menor em F_1. Vá ao segundo quadrante, proceda como os anteriores e marque o terceiro ponto, passe para o terceiro quadrante e marque o quarto ponto;

11º Passo: Aumente a distância de F_2 até S e marque um ponto S_1. Repetir os passos do 7º ao 10º.

12º Passo: Proceda da mesma forma, sempre mudando o ponto S_i até marcar uma quantidade de pontos suficientes para ligar posteriormente com elásticos ou barbante e formar a hipérbole.

Para calcular uma equação, é mais fácil, se usarmos as propriedades:

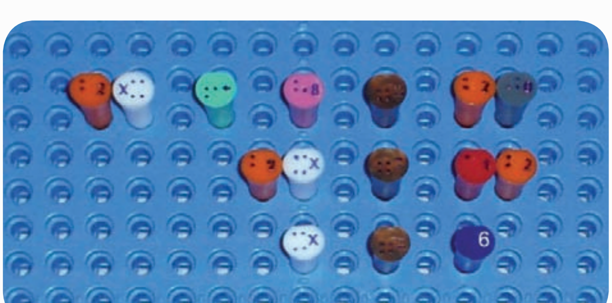
1º Propriedade: Some ou retire o mesmo valor de ambos os lados;

2º Propriedade: Multiplique ou divida pelo mesmo valor em ambos os lados.

Assim também é valido para as demais operações como potência e radiciação.

È importante lembrar que o sinal de igualdade representa um equilíbrio e "tudo que faço de um lado da equação, devo fazer do outro".

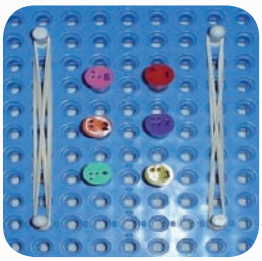
EQUAÇÕES



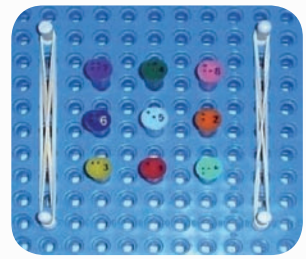
$2x + 8 = 20$
$2x = 12$
$x = 6$

MATRIZES

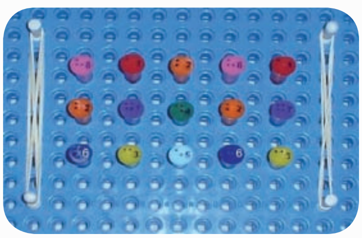
Para cálculo de matrizes, determinantes e sistemas lineares, deve-se proceder de forma análoga aos livros didáticos do ensino médio. As fotos são apenas ilustrativas:



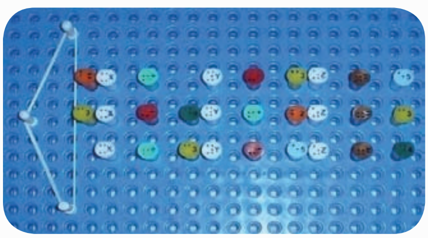
Matriz 3x2



Matriz 3x3



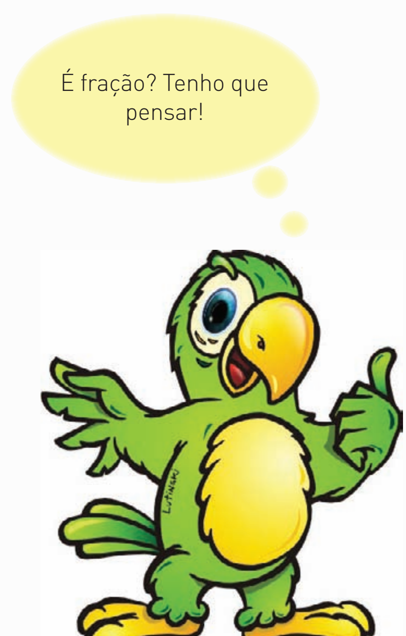
Determinante usando a regra de Sarrus.



Montagem de um sistema linear.

FRAÇÕES

Para o trabalho com frações propõe-se a não utilização do mmc (mínimo múltiplo comum), conteúdo que causa bastante transtorno aos alunos, uma vez, que gera muitas dúvidas, tais como: "Não sei mmc!", "Como vou aprender frações se não consigo resolver o mmc?". Na verdade, o educando, na maioria das vezes, não compreende o que acontece realmente, e para que serve calcular mmc.

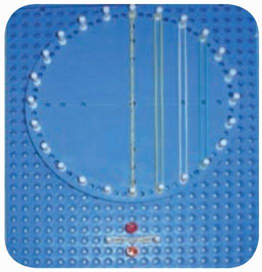


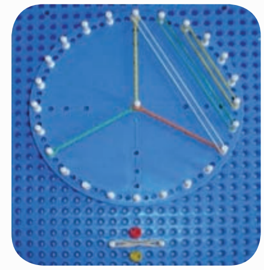
O conteúdo de frações é extremamente importante para a vida do aluno, tendo em vista que numa sociedade capitalista em qualquer lugar que possa estar, passa a observar preços colocados em sua forma inteira ou decimal, mas o princípio é que são resultados de divisões entre dois números, ou seja, entre frações. Portanto, simplificar a sua resolução significa simplificar a vida cotidiana, facilitando o empirismo do raciocínio lógico-matemático.

Exemplo: João e Pedro foram a uma pizzaria e pediram uma pizza. O garçom a dividiu ao meio. Logo depois que terminaram de comer, chegou José, amigo de Pedro e João. Decidiram, então, pedir outra pizza, a qual foi dividida em três partes. Como João tinha um compromisso inadiável, logo que os três amigos terminaram de comer a pizza ele foi acertar sua parte nas despesas. Mas, quando chegou ao caixa, surgiu a seguinte dúvida: "Quanto eu tenho que pagar?".

Para resolver este impasse, basta que sejam levados em consideração todos os detalhes. Foram pedidas duas pizzas: uma dividida em duas partes outra dividida em três partes.

João comeu metade da primeira pizza e a terça parte da segunda.

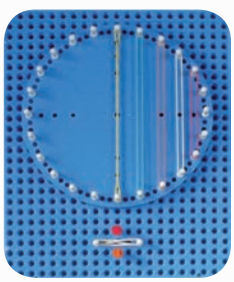


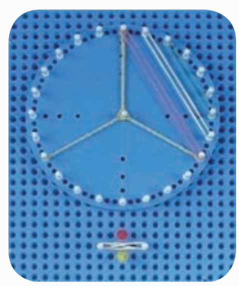


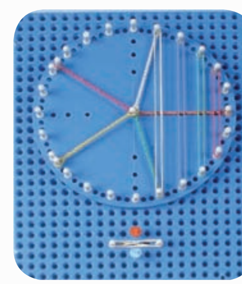
Logo, se tem as frações $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ que representam as duas partes que João comeu de pizza.

Não é difícil que o aluno resolva esta soma fazendo o seguinte cálculo:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ resultado que não é verdadeiro: $\frac{2}{5}$ na verdade, representa menos que metade de uma pizza, mas João comeu mais do que a metade. Vejamos:



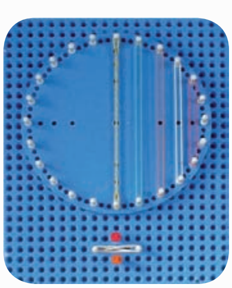


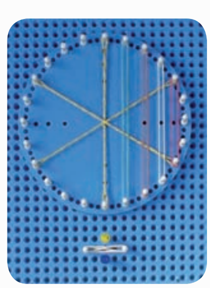


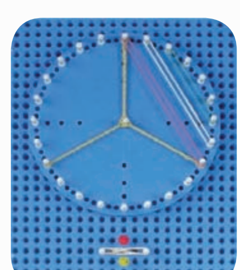
$$\frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{3} \quad \neq \quad \frac{2}{5}$$

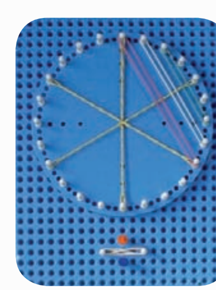
Para resolver esta soma, propõe-se que, ao invés de tirar o mmc, trabalhe com frações equivalentes, o que quer dizer que o denominador, delas deve ser igual. Isso porque o denominador indica em quantas partes foi repartido o todo, enquanto que o numerador indica quantas partes foram tomadas deste todo. Se as partes do todo forem equivalentes, fica fácil efetuar a operação.

Transpondo esta noção ao exemplo das pizzas, só é possível estabelecer uma relação entre elas a partir do momento em que os pedaços forem do mesmo tamanho.

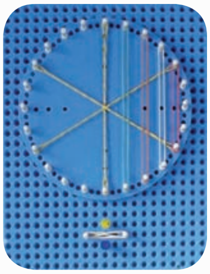
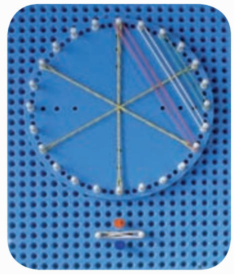
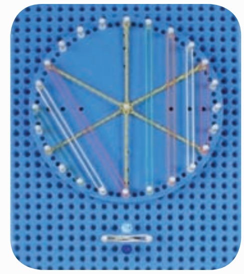








$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \qquad \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Portanto, João comeu 5 pedaços de 6.

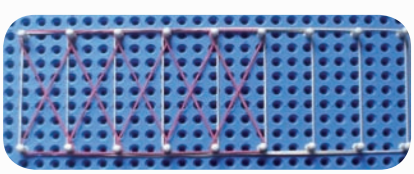
Só é possível somar frações quando as partes (denominadores) forem iguais. E encontrar frações equivalentes com denominadores iguais é um processo fácil e que dispensa o cálculo do mmc, basta multiplicar a primeira fração pelo denominador da segunda e multiplicar a segunda fração pelo denominador da primeira. No caso de três ou mais frações, utiliza-se da propriedade associativa. Vejamos alguns exemplos:

a. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1.3}{2.3} + \frac{1.2}{3.2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

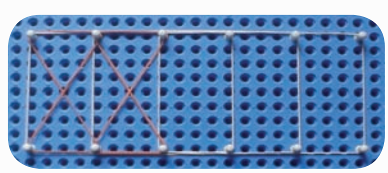
b. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1.3}{2.3} + \frac{1.2}{3.2}\right) + \left(\frac{1.5}{4.5} + \frac{1.4}{5.4}\right) = \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{5}{20} + \frac{4}{20}\right) =$

$$\frac{5}{6} + \frac{9}{20} = \frac{5.20}{6.20} + \frac{9.6}{20.6} = \frac{100}{120} + \frac{54}{120} = \frac{154}{120} = \frac{154 \div 2}{120 \div 2} = \frac{77}{60}$$

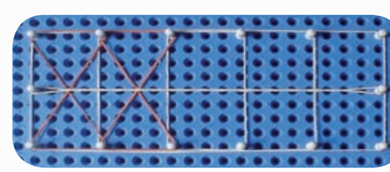
Pode-se representar uma fração na forma de retângulos. Os retângulos com elásticos cruzados em seu interior, representam as partes tomadas da fração.



$\frac{5}{8}$



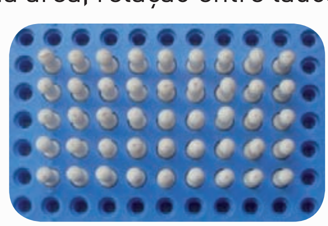
$\frac{2}{5}$



$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$

PRODUTO DE FRAÇÕES.

Importante lembrar que fração tem várias interpretações; pode ser relação entre medidas, parte de uma medida de comprimento, de uma área, relação entre lados de uma figura, etc.

Todo produto pode ser escrito em forma de linhas por colunas.

Na primeira figura 6 x 4 = 24 pinos, na segunda figura temos

9 x 5 = 45.

Ou seja, quando multiplicamos dois números, esses números representam dimensões (comprimento por largura), e a resposta é a área da figura.

Para calcular o produto de duas frações, consideramos o total de pinos do comprimento da figura (ou número de colunas) como sendo o denominador da primeira fração, o total de pinos da largura (ou número de linhas) o denominador da segunda fração e identificamos com elástico o total de pinos dos numeradores das frações em seus lados correspondentes.

Como exemplo vamos multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{3}{4}$. O primeiro passo é construir uma figura de comprimento com três pinos (denominador da primeira fração) e largura com quatro pinos (denominador da segunda fração).

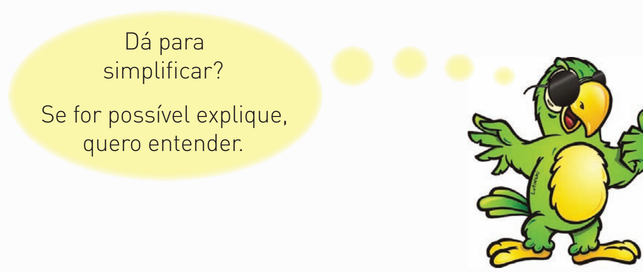
Em seguida identificamos com elástico os numeradores das frações em seus lados correspondentes.

A fração $\frac{2}{3}$ representa dois pinos marcados num total de três e a fração $\frac{3}{4}$ representa três pinos identificados num total de quatro.

A figura contornada por elástico tem seis pinos em um retângulo formado por doze pinos.

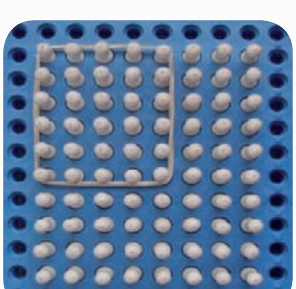
Assim podemos concluir que $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$.

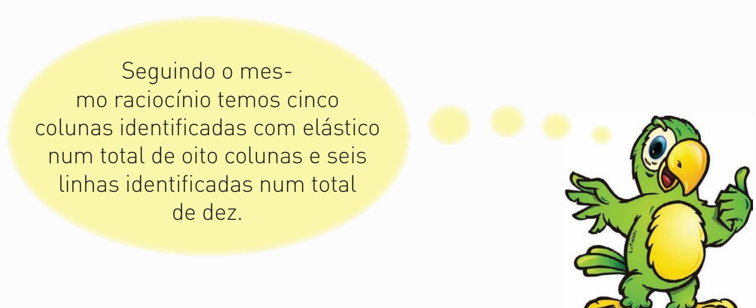
Voltando a figura formada, podemos reagrupar os pinos e formar figuras semelhantes;



Os três pinos da quarta linha passaram para a quarta coluna, formando dois grupos semelhantes, o grupo identificado por elástico é o produto de $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ e o grupo da direita representa parte do todo, assim temos: $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ a quantidade de pinos não muda, apenas a forma de representar a fração (de seis pinos em doze mudamos para **um** grupo em **dois**), que chamamos de frações equivalentes.

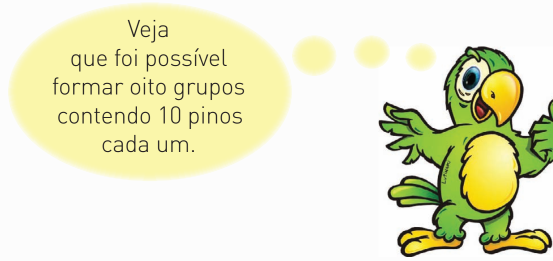
Outro exemplo: $\frac{5}{8} \times \frac{6}{10}$



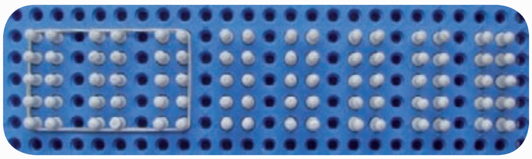


A figura retangular identificada com elástico representa o produto de 5 x 6 = 30 pinos e a figura inteira representa o produto de 8 x 10 = 80 pinos. Assim concluímos que o produto de fração por fração basta multiplicar numerador por numerador e denominador por denominador.

$\frac{5}{8} \times \frac{6}{10} = \frac{30}{80}$ ou seja 30 pinos num total de 80.



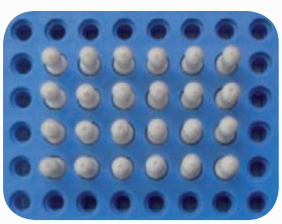
Vamos agrupar os pinos para tentar simplificar:



Pode-se concluir que $\frac{30}{80} = \frac{3}{8}$ (lê-se: trinta pinos em oitenta é igual a três grupos de dez em oito grupos de dez).

DIVISÃO DE FRAÇÕES

Voltando para a figura anterior para relembrar o produto;



Comprimento vezes largura é igual a área, 6 x 4 = 24.

Na divizão, é fazer o inverso, área dividida pelo comprimento é igual a largura.

24 : 6 = 4 nesse caso o dividento é a área, o divisor é o comprimento e o quociente (resposta) é a largura.

Quer dizer que estamos partindo do todo para encontrar as partes?

E agora como encontrar partes de partes?

Nesse caso a fração do dividendo é parte da área de um todo referência e o divisor seja o outro lado da figura.

Vamos adotar em nossos exemplos como padrão de referência uma figuras quadrada de lado 1, ou seja, uma unidade de medida.

Lembrando que o padrão de referencia deve ser ajustado de forma que o total de pinos seja divisível pelos denominadores das frações.

Considerando as colunas como numerador (área do todo referencia) e as linhas como denominador (lado).

No primeiro exemplo vamos dividir um por meio, $1 \div \frac{1}{2}$.

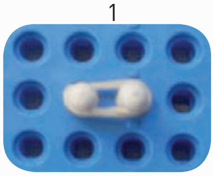
Nesse caso tem que ser um quadrado de lado formado com dois pinos.

1

1  

Agora vamos manter o lado unitário com dois pinos (coluna) e as linhas dividi-las ao meio.

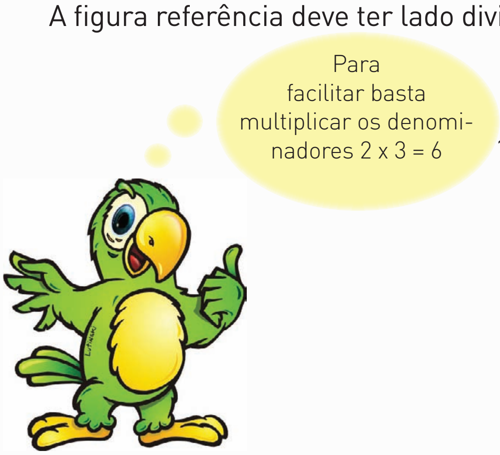
1

½ 

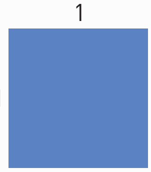
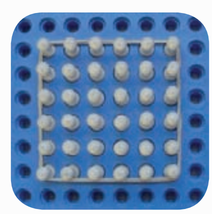
Assim a figura formada tem um total de duas colunas e uma linha, onde podemos concluir que $1 \div \frac{1}{2} = \frac{2}{1} = 2$, [lê-se um (representado por duas colunas) dividido por meio (inicialmente representado por duas linhas) é igual a duas colunas por uma linha].

Então vamos ver outros exemplos: $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$

A figura referência deve ter lado divisível por dois e por três.

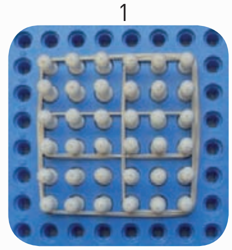
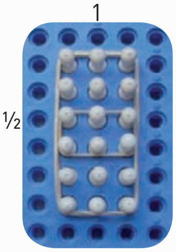


1

1  

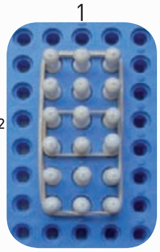
O dividendo é   que representa a área de meia figura.

1   1

1  ½ 

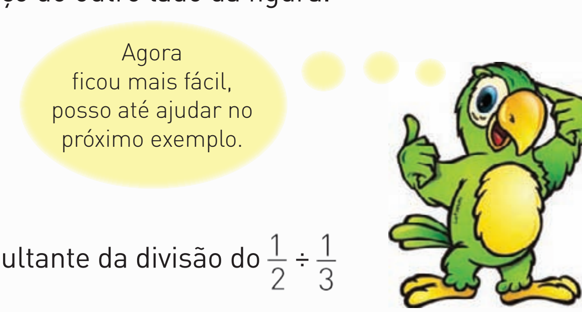
E nosso divisor é 1/3, ou seja vamos tomar um terço do outro lado da figura.

1

½ 

½

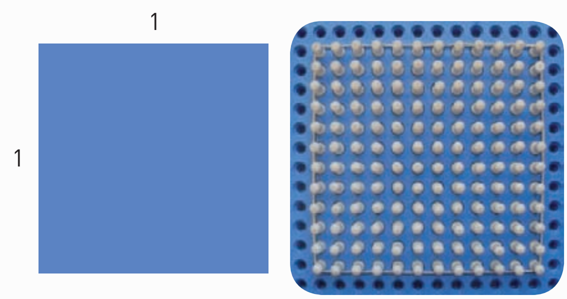
⅓  que é a figura resultante da divisão do $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$



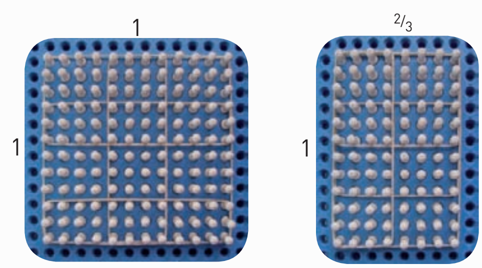
Logo $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$ meia figura (de seis linhas por seis colunas) dividida na terça parte, é uma figura formada com três colunas por duas linhas.

Vamos ver outra $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}$

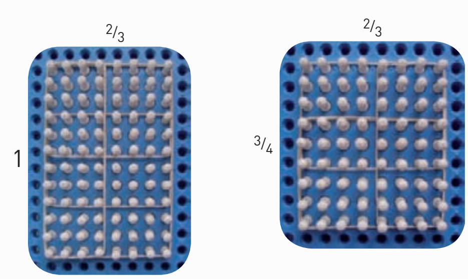
Nossa figura de referência deve ter um total de pinos em seus lados igual ao produto dos denominadores 3 x 4 = 12.

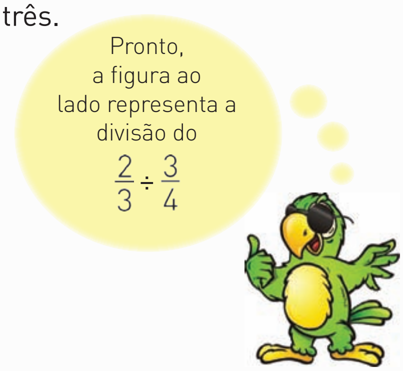


Da fração $\frac{2}{3}$, vamos dividir o comprimento em três partes e manter duas partes.



Da fração $\frac{3}{4}$ vamos recortar a largura em quatro parte e manter três.





Contando as colunas temos um total de 8 e o número de linhas é igual a 9. Assim, podemos concluir que $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$ dois terço (de uma figura 12 x 12) dividido por três quartos é igual a oito nonos (oito linhas por nove colunas)

Assim podemos afirmar que divisão de fração (pela regra) basta manter a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda.

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$$

SISTEMAS LINEARES

João e Pedro são pecuaristas. Um dia se encontraram e começaram a negociar. João disse a Pedro: "dê-me um de seus bois que ficarei com o dobro da quantia que você tem". E então Pedro retrucou: "Não, dê-me um dos seus que nós ficamos com a mesma quantia". Quantos bois têm cada um?

A primeira impressão que se tem é a de que o problema não tem solução, por não aparecer números no enunciado. As informações de um problema devem ser escritas na ordem em que são contadas e não podem ser alteradas.

Esse problema tem somente duas variáveis. Só é possível encontrar solução se pudermos escrever duas equações.

Primeira informação: "Dê-me um de seus bois que eu fico com o dobro que você tem".

A quantidade de João mais um boi é igual a quantidade de Pedro menos um boi. Então, a equação matemática resultante é:

$J + 1 = 2\,(P - 1)$

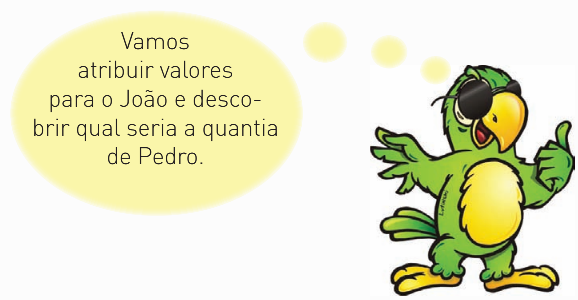
Segunda informação: "Então, dê-me um dos seus bois que ficamos com a mesma quantia".

Equação matemática: $J - 1 = P + 1$

Escrevendo uma nova equação para reduzir as equações vamos encontrar:

$J - P = 2$, ou seja, que João tem dois bois a mais que Pedro.

Todo problema que tem duas equações necessita de um confronto entre as mesmas para encontrar a solução.



<u>Solução Geométrica:</u>

$J + 1 = 2P - 2$ 1ª equação

$J - 1 = P + 1$ 2ª equação

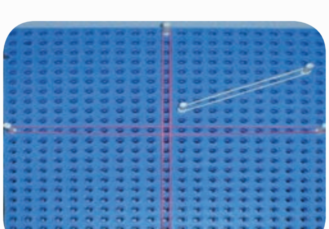
Neste método de solução, monta-se um gráfico de cada equação, onde a solução será a intersecção das retas resultantes.

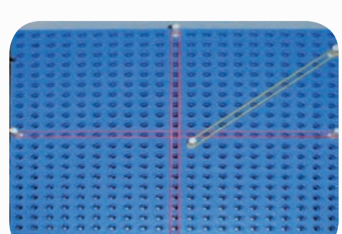
1ª equação: atribui-se um valor a qualquer uma das duas variáveis, substitui o mesmo na equação para encontrar a relação que este tem com a outra variável, no intuito de formar o par ordenado, e após localizá-lo no plano cartesiano.

Vamos marcar a quantidade de João no eixo "x" e a quantidade de Pedro no eixo "y":

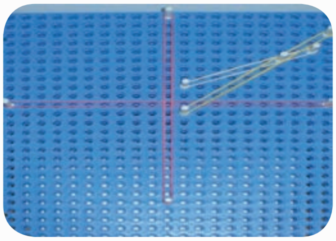
Pela 1ª equação temos: $J + 1 = 2P - 2$
Se $J = 1$ então $P = 2$
Se $J = 9$ então $P = 6$

Pela 2ª equação temos: $J = P + 2$
Se $J = 1$ então $P = -1$
Se $J = 10$ então $P = 8$





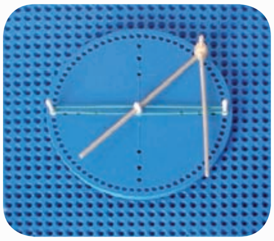
Agora, vamos construir os dois gráficos em um mesmo plano cartesiano, pois é a intersecção entre eles que permitirá conhecermos a resposta:



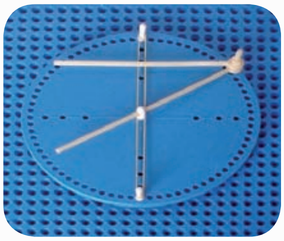
O ponto de intersecção das retas, forma o par ordenado (7,5), o qual é a solução do problema.

TRIGONOMETRIA

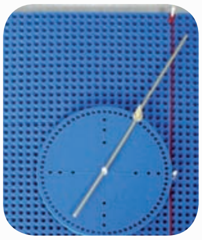
Outro conteúdo que pode ser explorado no Multiplano é o de Trigonometria. Isso porque no material a representação do círculo trigonométrico pode ser feita, através do **Multiplano** circular, que permite o estudo dos conceitos e cálculos relativos a esse assunto. Conceitos muitas vezes, distantes do aluno, que desconhece o porquê dos fenômenos, simplesmente os decora. É o caso das relações que envolvem seno, cosseno, tangente, etc. Na maioria dos casos o professor transmite ao aluno os valores que essas funções apresentam dependendo do ângulo analisado, assim como o sinal que esses valores podem ter consoante o quadrante em que estiverem localizados. Mas o porquê desses valores e o porquê da variação de sinais muitas vezes não são informações que chegam até os alunos, principalmente aos cegos, mesmo porque faltam materiais didáticos apropriados. Mas com auxílio do **Multiplano**, todas as relações trigonométricas podem ser concretizadas, o que facilita ao educando a compreensão dos fenômenos e conseqüente abstração.



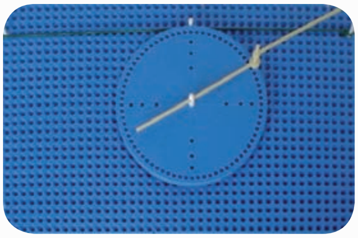
Cosseno: é a projeção do raio sobre o eixo "x".



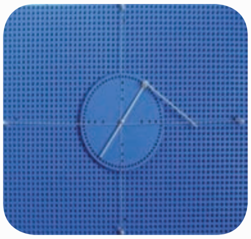
Seno: é a projeção do raio sobre o eixo "y".



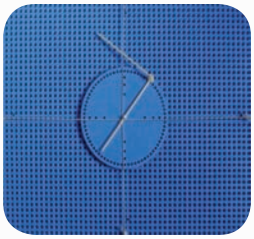
Tangente: Sua medida é identificada na reta que toca o círculo paralela ao eixo "y", na intersecção com prolongamento do raio.



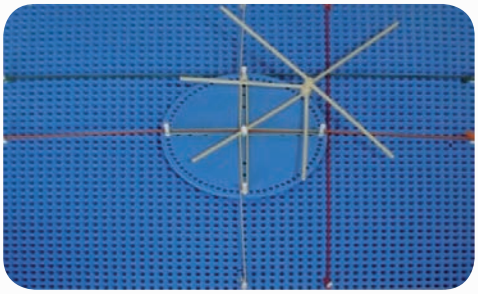
Cotangente: Sua medida é identificada na intersecção do raio com a reta que toca o círculo, paralela ao eixo "x".



Secante: A medida da secante começa no centro da circunferência, segue pelo eixo "x" até a intersecção com a reta que toca o círculo e é perpendicular ao raio.



Cossecante: A medida da cossecante começa no centro da circunferência, segue pelo eixo "y" até a intersecção com a reta que toca o círculo e é perpendicular ao raio.



Vista de todas as funções trigonométricas.

Gráfico da função cosseno:

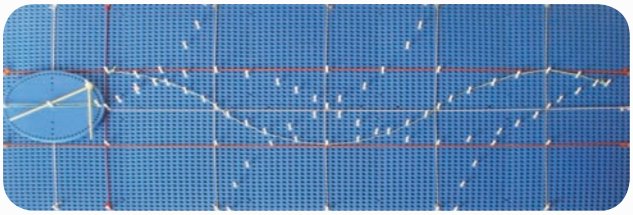


Gráfico da função seno:

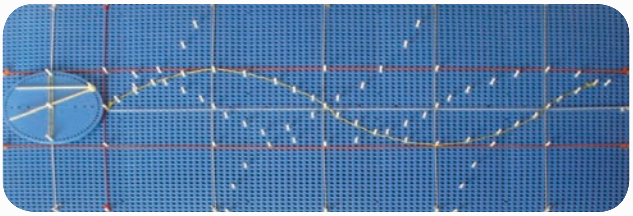


Gráfico da função tangente:

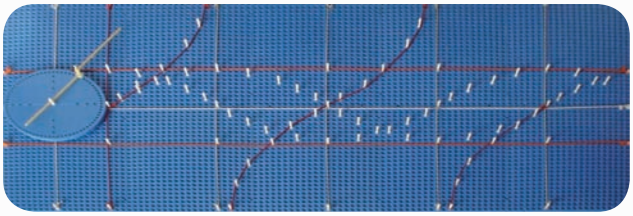


Gráfico da função cotangente:

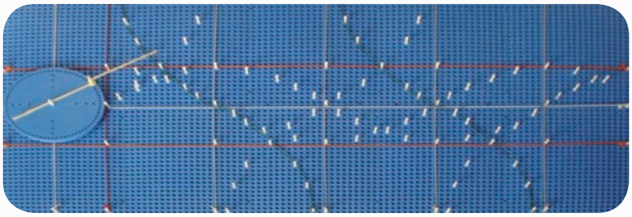
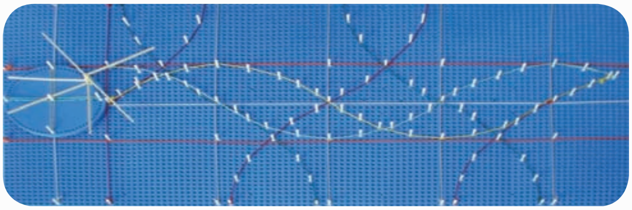
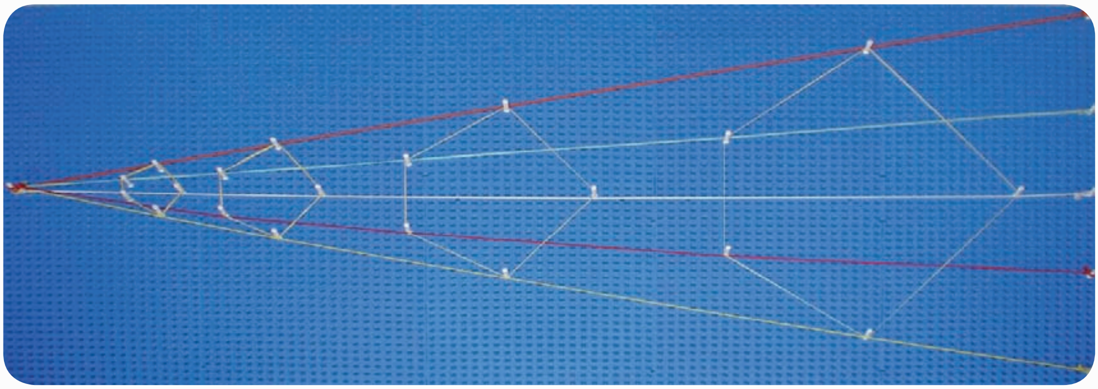


Gráfico da função seno, cosseno, tangente e cotangente:

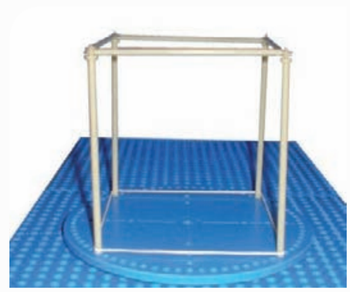


PENTÁGONOS PROPORCIONAIS



FIGURAS ESPACIAIS

As figuras espaciais podem ser construídas no Multiplano. As medidas das hastes são adequadas para serem montadas sobre o Multiplano Circular, onde podem ser montados os prismas regulares de base triangular, quadrada, hexagonal. Outros prismas podem ser montados com as mesmas hastes, basta fazer algumas tentativas.



Prisma de base quadrada montado sobre o Multiplano Circular: É uma forma fácil de visualizar a base, arestas, vértices apótema, diagonais, etc. As hastes possuem medidas iguais ao lado da base, tornando nessa configuração um cubo.

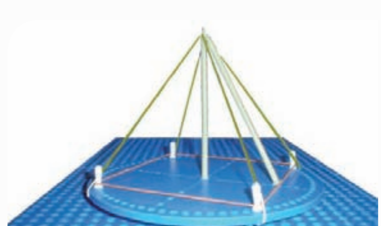
Prisma de base triangular

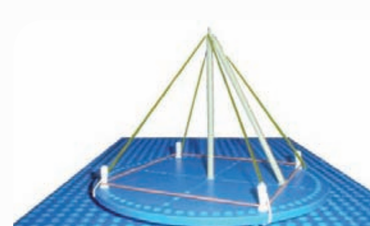
Prisma de base pentagonal

Prisma de base Hexagonal

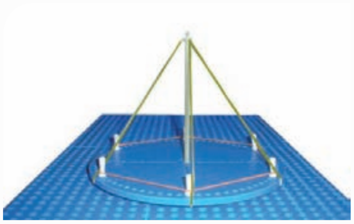
PIRÂMIDES

As pirâmides são facilmente contruidas no Multiplano. Primeiro deve-se colocar os pinos de acordo com a base, em seguida uma haste no centro do círculo, enroscar os elásticos na parte inferior na ponta de dois pinos passantes e finalmente enroscar o elástico no topo do pino central para formar o corpo e altura da pirâmide.

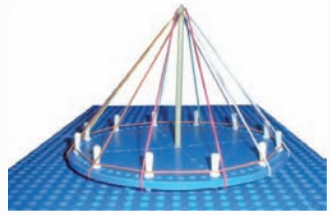




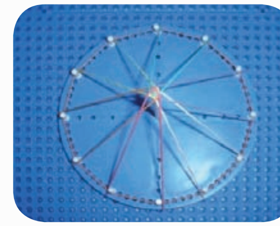
Pirâmide de base quadrada e seus elementos: arestas, vértices, apótema da base, apótema da lateral, etc.



Pirâmide de base hexagonal



Pirâmide de base dodecagonal

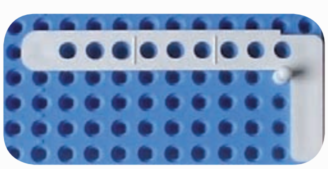


Vista superior

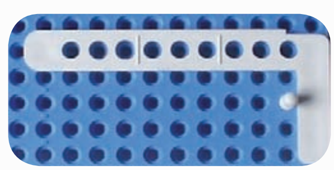
BASE PARA OPERAÇÕES

Os números podem ser escritos e calculados no **Multiplano**. O processo de identificação de um número é idêntico aos números Romanos antigos ou ao método Sorobã. A intenção nesse processo de cálculo é aproximar o aluno deficiente visual ao método convencional utilizado no quadro-de-giz com os demais alunos. Sabemos que o método do Sorobã é diferente do usado com lápis e papel, mas com a base de operações sobre o multiplano o aluno pode resolver com um método combinado entre quadro e Sorobã.

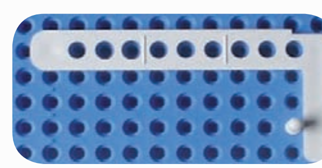
A identificação de um número é feita a partir dos furos localizado abaixo da "base de operação", na primeira coluna identificamos as unidade, na segunda as dezenas, na terceira as centenas, assim por diante, conforme a base decimal. Um pino colocado abaixo da "base de operação" identifica o número um; colocado no segundo furo representa o dois; no terceiro o três e no quarto representa o quatro. Para identificar do número cinco, coloca-se um pino no furo da "base de operação", o número seis está representado juntamente com o pino cinco e um, já o número sete está composto com os pinos cinco e dois, e assim sucessivamente até o nove. O número 10 está representado por apenas um pino na ordem das dezenas e nenhum na unidade. Vejamos alguns números:



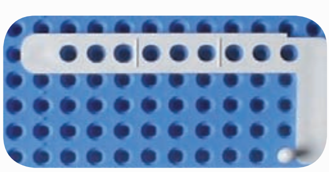
1



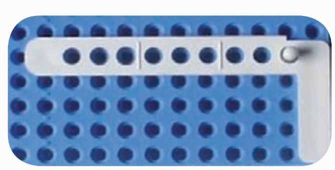
2



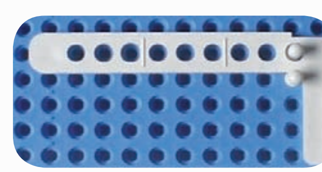
3



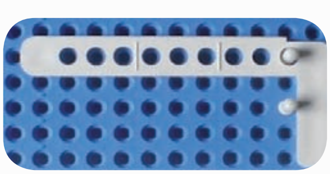
4



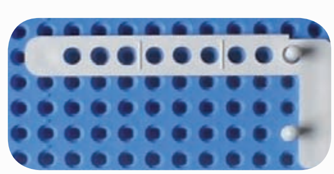
5



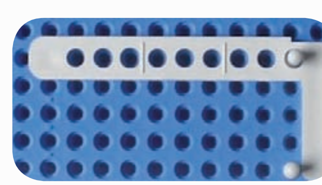
6



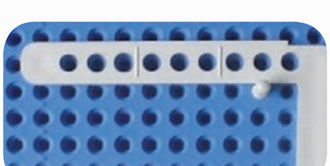
7



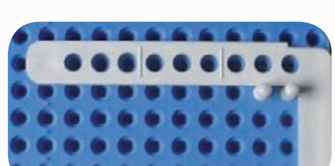
8



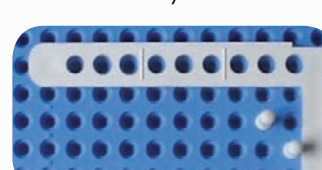
9



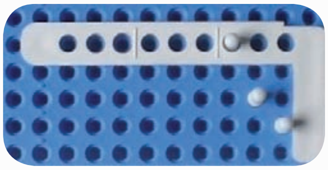
10



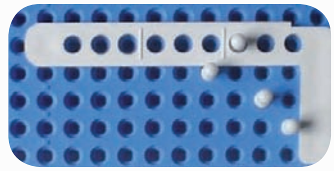
11



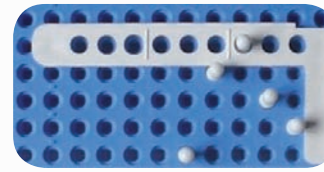
23



523



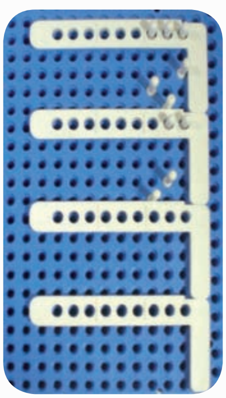
1523



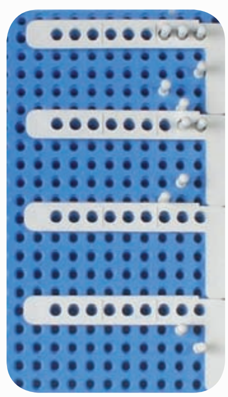
41523

OPERAÇÕES:

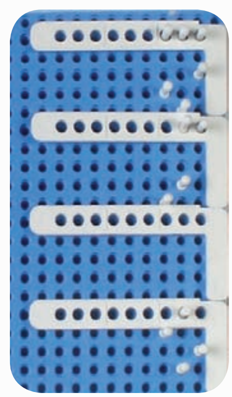
Na adição segue o mesmo método feito no caderno, só não tem o "vai um". Compare:



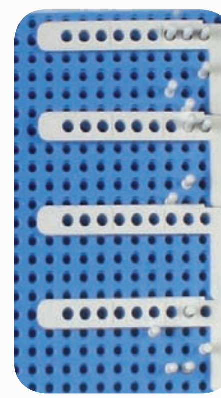
897
+ 485



897
+ 485
12

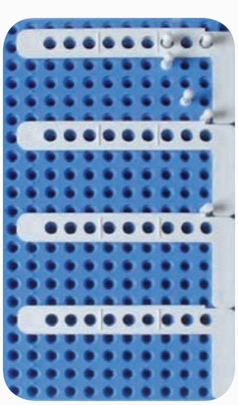


897
+ 485
182

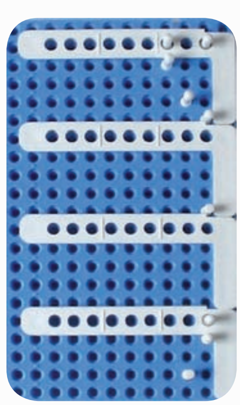


897
+ 485
1382

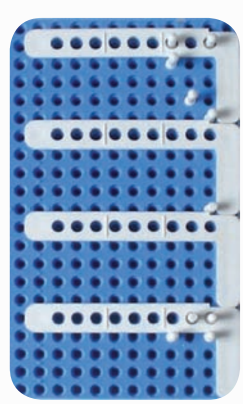
Multiplicação! Essa eu tiro de bico!



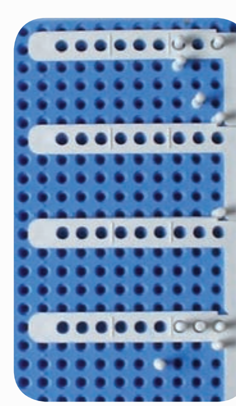
639
x 4



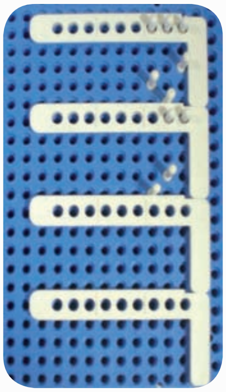
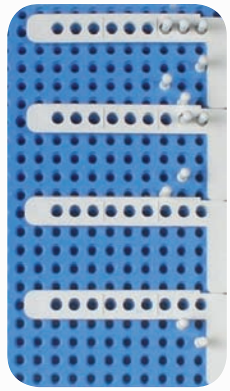
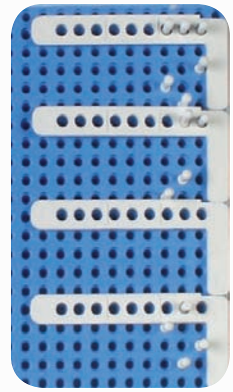
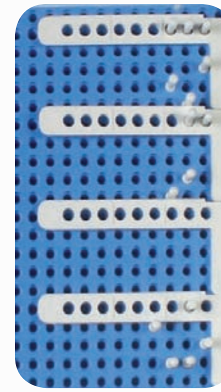
639
x 4
36



639
x 4
156



639
x 4
2256

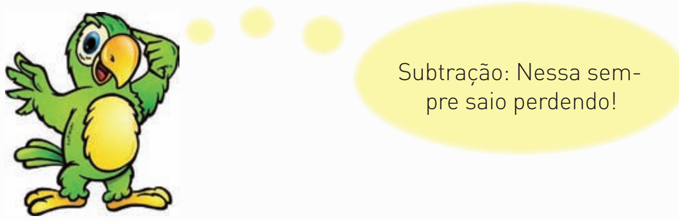





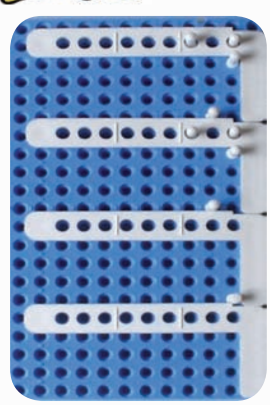
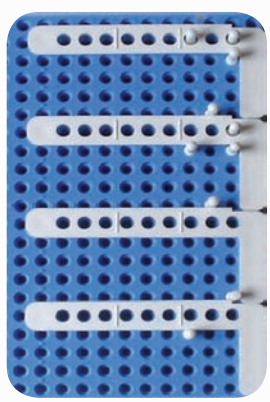
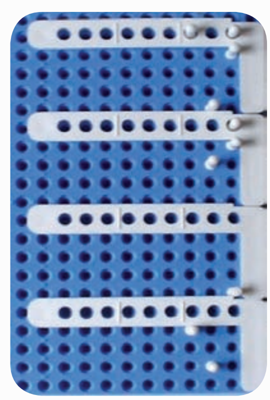
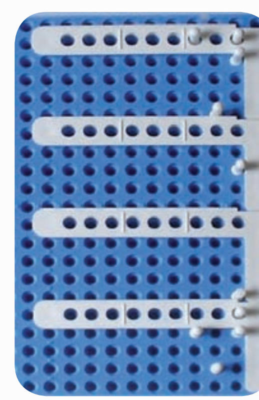
	8	4	7
-	6	8	9

	8			4			7
-	6			8			9

	7		1	3		1	7
-	6			8			9

	7		1	3		1	7
-	6			8			9
	1			5			8



546 |4

546 |4
-4 1
1

546 |4
-4 13
14
-12
2

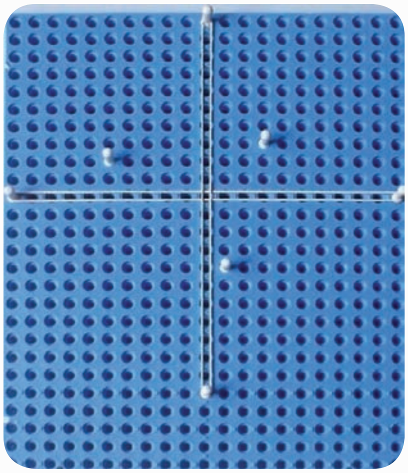
546 |4
-4 136
14
-12
26
-24
2

TEOREMA DE RUFE

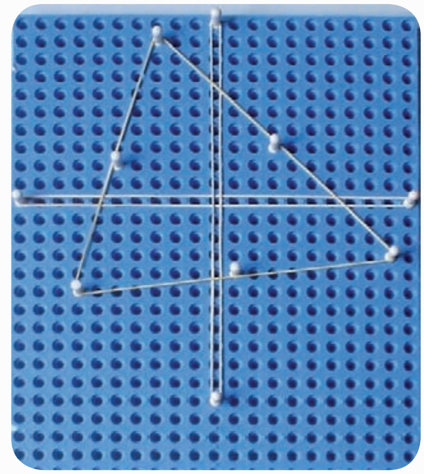
Dados três pontos no plano cartesiano $A(x_0, y_0)$, $B(x_1,y_1)$ e $C(x_2,y_2)$. Determinar um triângulo que contém estes três pontos como ponto médio de seus lados.

Considerando os pontos dos vértices do triângulo $X_1(x_3,y_3)$, $X_2(x_4,y_4)$ e $X_3(x_5,y_5)$, as coordenadas de cada ponto será:

$X_1\ (x_3 = x_0 + x_1 - x_2,\ y_3 = y_0 + y_1 - y_2)$,
$X_2\ (x_4 = x_0 + x_2 - x_1,\ y_4 = y_0 + y_2 - y_1)$,
$X_3\ (x_5 = x_1 + x_2 - x_0,\ y_5 = y_1 + y_2 - y_0)$.



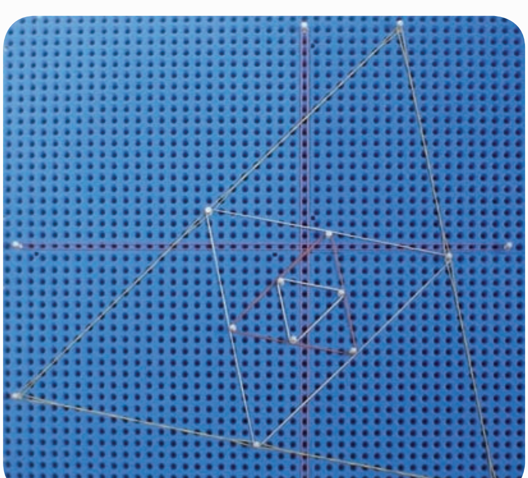
Marcando os pontos $X_1(-3,9)$, $X_2(9, -3)$ e $X_3(-7, -5)$ no Multiplano, e ligando com um elásticos, pode-se perceber que realmente os pontos encontrados são vértices do triângulo que tem como ponto médio os pontos A(3,3); B(-5,2) e C(1, –4).



Na figura ao lado foram marcados os pontos: A(3,3); B(-5,2) e C(1, –4).
Pelo teorema de RUFE, os pontos de vértice são:

$X_1(3 - 5 - 1,\ 3 + 2 + 4)$,
$X_1(-3,9)$;
$X_2(3 + 1 + 5,\ 3 - 4 - 2)$,
$X_2(9, -3)$.
$X_3(-5 + 1 - 3,\ 2 - 4 - 3)$
$X_3(-7, -5)$

Já aprendi! Vou marcar três pontos no Multiplano e criar vários triângulos que possuem como ponto médio os vértices do triângulo anterior.



Demonstração do teorema:

Se: $A(x_0,y_0)$ é ponto médio dos pontos $X_1(x_3,y_3)$ e $X_2(x_4,y_4)$,

$B(x_1,y_1)$ é ponto médio dos pontos $X_1(x_3,y_3)$ e $X_3(x_5,y_5)$,

$C(x_2,y_2)$ é ponto médio dos pontos $X_2(x_4,y_4)$ e $X_3(x_5,y_5)$,

Então:

a) $2x_0 = x_3 + x_4 \Rightarrow x_3 = 2x_0 - x_4$

b) $2x_1 = x_3 + x_5 \Rightarrow x_3 = 2x_1 - x_5$

c) $2x_2 = x_4 + x_5$

d) De "a" e "b" temos; $2x_0 - x_4 = 2x_1 - x_5 \Rightarrow 2x_0 - 2x_1 = x_4 - x_5$

e) Somando "c" com "d" temos; $2x_2 + 2x_0 - 2x_1 = 2x_4$

f) Dividindo "e" por dois, o resultado é; $x_4 = x_0 + x_2 - x_1$.

g) Substituindo "f" em "c" $2x_2 = x_0 + x_2 - x_1 + x_5 \Rightarrow x_5 = x_1 + x_2 - x_0$

h) Substituindo "g" em "b" $x_3 = 2x_1 - (x_1 + x_2 - x_0) \Rightarrow x_3 = x_0 + x_1 - x_2$

"No início de um trabalho se imagina uma tarefa impossível, mas com o passar do tempo percebemos que somos todos iguais, apesar de vivermos em uma sociedade que avalia as pessoas, não pela sua capacidade e sim pelas suas debilidades, as pessoas "ditas normais" conseguem viver sozinhas, mas as pessoas com necessidades educacionais especiais precisam de nossa ajuda para superar as barreiras que foram criadas com a discriminação".

Profº Rubens Ferronato

Anotações:

INDÚSTRIA DE PRODUTOS EDUCACIONAIS

MULTIPLANO

MULTIPLANO

Site: www.multiplano.com.br
E-mail: comercial@multiplano.com.br
Fones: 55 (41) 3266-4629 / 3205-0220
Curitiba - Paraná - Brasil